

DOINA MASSIER

MECANICĂ. APLICAȚII

II

MECANICA NEWTONEANĂ A SOLIDULUI RIGID

Editura Universității din București

– 2001 –

DOINA MASSIER

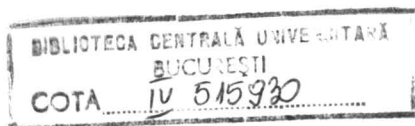
MECANICĂ. APLICAȚII

II

MECANICA NEWTONEANĂ A SOLIDULUI RIGID

Editura Universității din București

– 2001 –



Referenți științifici: **Prof. dr. Nicolae ȘANDRU**
Prof. dr. Nicole MARCOV

© Editura Universității din București
Șos. Panduri 90-92, București - 76235; Tel./Fax: 410.23.84
E-mail: editura@unibuc.ro
Internet: www.editura.unibuc.ro

B.C.U. Bucuresti



C20017474

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
MASSIER, DOINA**

Mecanica. Aplicații / Doina Massier - București,
Editura Universității din București, 1998-
vol. : fig., tab. : 29 cm

Partea 2: Mecanica newtoniană a solidului rigid. -
2001. p. Bibliofr. ISBN 973-575-551-3
531(075.8)

PREFAȚA

Această volum reprezintă partea a II-a a lucrării MECANIA. APLICAȚII, dedicată Mecanicii newtoniene a sistemelor materiale rigide. Ca și prima parte – Mecanica newtoniană a sistemelor discrete de puncte materiale, ea se adresează studenților secției matematică-mecanică (anii II, III) dar și celor de la celelalte secții ale Facultății de Matematică, reprezentând un material util pentru seminarii.

Aplicațiile cuprinse și în acest volum sunt alese în sprijinul ideii exemplificării posibilității modelării matematice, a drumului fenomen – sistem de axiome și prelucrări matematice – fenomen. Nu sunt considerate aplicații care ar constitui mai degrabă obiect al unor discipline înrudite și care își găsesc locul în planul de învățământ pentru învățământul tehnic superior (statica - rezistența materialelor). Au fost lăsate la o parte și aplicații cu caracter relativ artificial, chiar dacă unora, clasice fiind, li se poate da o rezolvare elegantă cu o frumoasă interpretare geometrică. S-au reținut mai ales acele aplicații ce își găsesc un corespondent în realitate. Pentru aceasta s-au avut în vedere următoarele aspecte:

- scrierea ecuațiilor diferențiale de evoluție a sistemului mecanic cu sublinierea unor caracteristici calitative ce decurg din acestea (integrale prime, singularități etc);

- rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale ordinare pe cale analitică sau numerică (de câte ori a fost posibil în mărimi adimensionale), cu rezultate prezentate sub formă de tabele sau grafice.

Există și aplicații cu caracter teoretic, menite să sublinieze diferența dintre modelarea matematică în mecanică și unele domenii ale matematicii.

În fiecare capitol, uneori și în unele paragrafe, s-au menționat relațiile fundamentale necesare abordării aplicațiilor precum și unele trimiteri bibliografice.

Pentru aspecte mai deosebite, în text au fost incluse programele MAPLE de calcul numeric al unor mărimi (integrale care nu admit primitive, integrale eliptice), de rezolvare numerică a unor ecuații diferențiale, reprezentări grafice speciale etc.

Doina Massier

CUPRINS

PARTEA A II-A MECANICA NEWTONEANA A SISTEMELOR MATERIALE RIGIDE

PREFATA	3
CUPRINS	4
NOTATII	6
DIMENSIUNI SI UNITATI DE MASURA	8
Capitolul I. TENSORI DE ORDINUL AL DOILEA	9
PRINCIPIILE MECANICII NEWTONEENE	15
A SISTEMELOR MATERIALE RIGIDE	
Capitolul II. ELEMENTE DE CINETICA	18
Capitolul III. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID	31
Capitolul IV. DINAMICA SOLIDULUI RIGID	39
§4.1. Preliminarii	41
§4.2. Statica solidului rigid	45
§4.3. Dinamica solidului rigid liber	59
§4.4. Dinamica solidului rigid cu axă fixă	62
§4.5. Dinamica solidului rigid cu punct fix	77
§4.6. Mișcarea plan-paralelă	108
§4.7. Dinamica solidului rigid cu legături de contact, fără și cu frecare	115
Capitolul V. DINAMICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE	141
BIBLIOGRAFIE	150

PARTEA I MECANICA NEWTONEANA A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE

PREFATA	3
CUPRINS	4
NOTATII	6
DIMENSIUNI SI UNITATI DE MASURA	8
Capitolul 1. CALCUL VECTORIAL	9
§1.1. Aplicații geometrice. Identități	9
§1.2. Ecuații vectoriale	13
§1.3. Sisteme de vectori alunecători	17
§1.4. Baze reciproce. Coordonate curbilinii	24

PRINCIPIILE MECANICII NEWTONEENE A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE	33
Capitolul 2. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL.....	35
§2.1. Cinematica mișcării rectilinii și circulare	36
§2.2. Cinematica mișcării pe o curbă în coordonate carteziane	41
§2.3. Cinematica în coordonate polare	43
§2.4. Cinematica mișcării relative	48
§2.5. Probleme diverse	51
Capitolul 3. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL	60
§3.1. Consecințe ale principiilor fundamentale	60
§3.2. Statica punctului material	63
§3.3. Mișcarea punctului material greu la suprafața Pământului	68
§3.4. Mișcarea punctului material în câmp central. Mișcarea kepleriană	81
§3.5. Mișcarea unui punct material pe o suprafață, fără și cu frecare	94
§3.6. Mișcarea punctului material pe o curbă, fără și cu frecare	102
§3.7. Mișcări tautocrone	123
§3.8. Mișcări oscilatorii.....	130
§3.9. Mișcarea relativă a punctului material	140
Capitolul 4. DINAMICA SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE	149
Anexă. FUNCȚII ELIPTICE	158

PARTEA A III-A MECANICA ANALITICA

Capitolul 1. MECANICA LAGRANGEANA

- §1.1. Principiul lucrului mecanic virtual pentru sisteme discrete de puncte materiale și pentru solidul rigid
- §1.2. Ecuatiile Lagrange de speța a doua pentru sisteme olonome discrete de puncte materiale
- §1.3. Ecuatiile Lagrange de speța a doua pentru solidul rigid cu legături olonome
- §1.4. Ecuatiile Lagrange de speța a II-a cu multiplicatori pentru sisteme neolonome
- §1.5. Ecuatiile Appell

Capitolul 2. MECANICA HAMILTONIANA

- §2.1. Ecuatiile canonice (Hamilton)
- §2.2. Ecuatia Hamilton-Jacobi
- §2.3. Transformări canonice

Capitolul 3. PRINCIPII VARIATIONALE

Capitolul 4. STABILITATEA MISCĂRII SI ECHILIBRULUI

RELATIVITATE RESTRANSA

Capitolul 5. PROBLEME DE MECANICA RELATIVISTA A PUNCTULUI MATERIAL

NOTATII

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma, \dots \\ a, b, c, \dots \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots \end{array} \right.$	mărimi scalare
$\left\{ \begin{array}{l} \omega, \Omega, \dots \\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \dots \end{array} \right.$	mărimi vectoriale
$\mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{U}, \dots$	mărimi tensoriale
$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \\ \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \end{array} \right.$	baze reciproce de vectori (oarecari)
$\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$	bază ortonormată de vectori
$\{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\}$	bază ortonormată de vectori (asociată cu referențial inerțial)
$\ \mathbf{u}\ = u$	modulul unui vector
$u^i, T^{jk}, \dots$	componentele contravariante ale unui vector, respectiv tensor
$u_j, T_{jk}, \dots$	componentele covariante ale unui vector, respectiv tensor
T^j_k, T_m^n	componentele mixte ale unui tensor
$t, t^o, \dots$	timp
τ	perioadă
$\mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{X}_o, \dots$	vectori de poziție (în raport cu un reper menționat)
$\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{V}, \dot{\mathbf{X}}_A, \mathbf{V}_A, \dots$	viteze (în raport cu un reper menționat)
$\ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{A}, \ddot{\mathbf{X}}_A, \mathbf{A}_A, \dots$	acelerații (în raport cu un reper menționat)
ψ, θ, φ	unghiurile lui Euler
ψ	unghi de precesie
θ	unghi de nutație
φ	unghi de rotație proprie
ω	viteză unghiulară
$\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$	componentele vitezei unghiulare în raport cu reperul inerțial
$\omega^1, \omega^2, \omega^3$	componentele vitezei unghiulare în raport cu reperul solidar cu solidul rigid
$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^o, \mathbf{V}_A^o, \dots \\ \psi^o, \theta^o, \varphi^o, \\ \dot{\psi}^o, \dot{\theta}^o, \dot{\varphi}^o, \omega^o \end{array} \right.$	date inițiale
M	masă totală a solidului rigid
μ	masă specifică, densitate
$\mathbf{x}_C$	vectorul de poziție a centrului de masă al solidului rigid în raport cu reperul solidar cu acesta
$\mathbf{I}_A$	tensorul de inerție al solidului rigid în A, în raport cu reperul solidar cu acesta

$\mathbf{F}, \mathbf{F}_i, \mathbf{R}, \mathbf{N}, \Phi, \dots$	forțe care acționează asupra solidului rigid
$\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}''$	forțe de legătură (reacțiuni)
$\mathbf{N}, \mathbf{N}_A, \dots$	forțe normale de legătură (reacțiuni normale)
$\Phi, \Phi_A, \dots$	forțe tangențiale de legătură (reacțiuni tangențiale; forțe de frecare)
$\mathbf{F}$	rezultanta forțelor (date și de legătură) care acționează asupra solidului rigid
$\mathbf{H}$	impuls total al solidului rigid
$\mathbf{M}_O, \mathbf{M}_A$	moment al forțelor în raport cu un pol precizat
$\mathbf{M}_r$	moment de frecare de rostogolire
$\mathbf{M}_n$	moment de frecare de pivotare
$\mathbf{M}_A$	moment resultant al forțelor (date și de legătură) care acționează asupra solidului rigid, în raport cu polul A
$\mathbf{K}_A$	moment cinetic total al solidului rigid, în raport cu polul A
T	energia cinetică a totală a solidului rigid
P	puterea mecanică a totală a forțelor (date și de legătură) care acționează asupra solidului rigid
U	potențialul unei forțe
V	energia potențială
f	coeficient de frecare de aderență/alunecare
δ, δ_r	coeficient de frecare de rostogolire
δ_p	coeficient de frecare de pivotare
$\mathbf{g}$	acclerația gravitațională
$\mathbf{C}$	centrul de masă al unui sistem de puncte materiale

DIMENSIUNI SI UNITATI DE MASURA

Nr.crt.	Mărimea	Dimensiuni	Unități S.I.	Observații
1	Lungime, vectori de poziție	$L^1 M^0 T^0$	m (metru)	-
2	Masă	$L^0 M^1 T^0$	kg	-
3	Timp ,perioadă	$L^0 M^0 T^1$	s (secunda)	-
4	Masă specifică lineară Masă specifică superficială Masă specifică volumică	$L^{-1} M^1 T^0$ $L^{-2} M^1 T^0$ $L^{-3} M^1 T^0$	kg m^{-1} kg m^{-2} kg m^{-3}	$\mu = M / l$ $\mu = M / A$ $\mu = M / V$
5	Moment/produs de inerție, tensor de inerție	$L^2 M^1 T^0$	kg m^2	$I = Md^2$
6	Viteza	$L^1 M^0 T^{-1}$	m s^{-1}	$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{dt}$
7	Accelerație	$L^1 M^0 T^{-2}$	m s^{-2}	$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}, \mathbf{A} = \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2}$
8	Unghi plan	$L^0 M^0 T^0$	rad	$\alpha, \beta, \dots, \psi, \theta, \phi,$
9	Viteză unghiulară	$L^1 M^0 T^{-1}$	rad s^{-1}	$\omega = \dot{\psi} \mathbf{I}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\phi} \mathbf{t}_3$
10	Accelerație unghiulară	$L^1 M^0 T^{-2}$	rad s^{-2}	$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$
11	Forță	$L^1 M^1 T^{-2}$	N (newton)	$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
12	Moment al forței	$L^2 M^1 T^{-2}$	J (joule)	$\mathbf{M}_O = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$
13	Impuls	$L^1 M^1 T^{-1}$	N s	$\mathbf{H} = m\mathbf{v}$
14	Moment cinetic	$L^2 M^1 T^{-1}$	J s	$\mathbf{K}_O = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$
15	Energie(cinetică,potențială)	$L^2 M^1 T^{-2}$	J	$T = \frac{1}{2}mv^2$
16	Putere mecanică	$L^2 M^1 T^{-3}$	W (watt)	$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
17	Coeficient de frecare de alunecare/aderență	$L^0 M^0 T^0$	-	$f = \frac{\ \Phi\ }{\ \mathbf{N}\ }$
18	Coeficient de frecare de rostogolire/pivotare	$L^1 M^0 T^0$	m	$\delta = \frac{\ \mathbf{M}\ }{\ \mathbf{N}\ }$
19	Percuție	$L^1 M^1 T^{-1}$	N	$\mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$

TENSORI DE ORDINUL AL DOILEA

Fie E spațiul punctual euclidian, V spațiul vectorial de translație asociat.

Definiție. Se numește *tensor de ordinul al doilea* o aplicație lineară

$$\mathbf{T} : V \rightarrow V,$$

$$\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{T}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 \mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 \mathbf{T}(\mathbf{v}_2).$$

Exemple:

- tensorul nul $\mathbf{O}\mathbf{v} = \mathbf{o}$
- tensorul identitate (unitate) $\mathbf{1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$
- produs tensorial a doi vectori $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a}$

Notatie. Mulțimea tensorilor de ordinul al doilea se notează $L(V, V) = L_2$.

Operații cu tensori de ordinul al doilea

Definiție. *Egalitatea a doi tensori:* doi tensori de ordinul al doilea $\mathbf{T}$ și $\mathbf{S}$ sunt *egali* dacă iau valori egale pentru orice vector din V

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Definiție. *Adunarea tensorilor de ordinul al doilea* " + " : $V \times V \rightarrow V$: suma $\mathbf{T} + \mathbf{S}$ a doi tensori de ordinul al doilea $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in L_2$ este definită prin

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S})\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{v} + \mathbf{S}\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Proprietăți

a1) comutativitate

$$\forall \mathbf{T}, \mathbf{S} \in L_2 \quad \mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{T};$$

a2) asociativitate

$$\forall \mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{U} \in L_2 \quad \mathbf{T} + (\mathbf{S} + \mathbf{U}) = (\mathbf{T} + \mathbf{S}) + \mathbf{U};$$

a3) element nul

$$\forall \mathbf{T} \in L_2 \quad \mathbf{O} + \mathbf{T} = \mathbf{T};$$

a4) element opus

$$\forall \mathbf{T} \in L_2, \exists \mathbf{T}' \in L_2, \mathbf{T} + \mathbf{T}' = \mathbf{O}.$$

Definiție. *Inmulțirea cu scalar* a tensorilor de ordinul al doilea " " : $\mathbf{R} \times V \rightarrow V$: produsul $\alpha\mathbf{T}$ al unui tensor de ordinul al doilea $\mathbf{T} \in L_2$ cu scalarul $\alpha \in \mathbf{R}$ este definit prin

$$(\alpha\mathbf{T})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{T}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Proprietăți:

i1) distributivitate față de adunarea tensorilor

$$\forall \mathbf{T}, \mathbf{S} \in L_2, \alpha \in \mathbf{R} \quad \alpha(\mathbf{T} + \mathbf{S}) = \alpha\mathbf{T} + \alpha\mathbf{S};$$

i2) distributivitate față de adunarea scalarilor

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{T} \in L_2 \quad (\alpha + \beta)\mathbf{T} = \alpha\mathbf{T} + \beta\mathbf{T};$$

i3) "asociativitatea" înmulțirii cu scalar

$$\forall \mathbf{T} \in L_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \alpha(\beta\mathbf{T}) = (\alpha\beta)\mathbf{T};$$

i4) înmulțirea cu scalarul unitate

$$\forall \mathbf{T} \in L_2, 1 \in \mathbf{R} \quad 1\mathbf{T} = \mathbf{T}.$$

Definiție. Compunerea a doi tensori de ordinul al doilea " " : $V \times V \rightarrow V$: produsul de compoziție TS al tensorilor de ordinul al doilea $T, S \in L_2$ este tensorul definit prin

$$(TS)v = T(Sv) \quad \forall v \in V.$$

Proprietăți:

c1) asociativitate

$$\forall T, S, U \in L_2 \quad T(SU) = (TS)U ;$$

c2) distributivitate față de adunarea tensorilor

$$\forall T, S, U \in L_2 \quad T(S+U) = TS + TU; (S+U)T = ST + SU;$$

c3) "asociativitate" la înmulțirea cu scalari

$$\forall T, S \in L_2, \forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \alpha(TS) = (\alpha T)S;$$

c4) element neutru (unitate)

$$\forall T \in L_2 \quad 1T = T1 = T.$$

Observații. Proprietățile menționate conduc la structura de spațiu vectorial în raport cu primele două operații și la structura de algebră în raport cu cele trei operații. Aceste structuri, precum și cea din spațiul vectorial de translație au sens numai pentru scalari adimensionali, vectori cu dimensiune lungime și tensori de ordinul al doilea adimensionali. Proprietățile rămân adevărate dacă se extind definițiile printr-o convenție de corespondență dimensională acolo unde operațiile menționate au sens. Structurile algebrice însă nu mai au sens.

Teoremă. Dacă $\{e_j\}_{j=1,2,3}$ și $\{e^k\}_{k=1,2,3}$ sunt baze reciproce în V , atunci $\{e_j \otimes e_k\}_{j,k=1,2,3}$, $\{e_j \otimes e^k\}_{j,k=1,2,3}$, $\{e^j \otimes e^k\}_{j,k=1,2,3}$, $\{e^j \otimes e_k\}_{j,k=1,2,3}$ sunt baze în L_2 .

Se obțin descompunerile unui tensor

– tensor contravariant	$T = T^{pq} e_p \otimes e_q,$	$T^{pq} = e^p \cdot T e^q ;$
– tensor covariant	$T = T_{rs} e^r \otimes e^s,$	$T_{rs} = e_r \cdot T e_s ;$
– tensor mixt	$T = T^m{}_n e_m \otimes e^n,$	$T^m{}_n = e^m \cdot T e_n$
sau	$T = T_a{}^b e^a \otimes e_b,$	$T_a{}^b = e_a \cdot T e^b .$

Același tensor poate fi privit drept tensor contravariant, covariant sau mixt după tipul bazei considerate. Între componente există următoarele relații

$$\begin{aligned} T^{pq} &= T_{rs} (e^r \cdot e^p) (e^s \cdot e^q) = T^p{}_n (e^n \cdot e^q) = T_a{}^q (e^a \cdot e^p), \\ T_{rs} &= T^{pq} (e_r \cdot e_p) (e_s \cdot e_q) = T^m{}_s (e_r \cdot e_m) = T_r{}^b (e_s \cdot e_b), \\ T^m{}_n &= T^{mq} (e_n \cdot e_q) = T_{rn} (e^r \cdot e^m) = T_a{}^b (e^m \cdot e^a) (e_n \cdot e_b), \\ T_a{}^b &= T^{pb} (e_a \cdot e_p) = T_{as} (e^s \cdot e^b) = T^m{}_n (e_m \cdot e_a) (e^n \cdot e^b) \end{aligned}$$

(relații de ridicare respectiv coborâre a indicilor, de transformare a tensorului dintr-un tip în altul).

Operații cu tensori - expresii analitice

– adunarea tensorilor $S = A + B$

$$S^{pq} = A^{pq} + B^{pq}; S_{rs} = A_{rs} + B_{rs}; S^m{}_n = A^m{}_n + B^m{}_n; S_a{}^b = A_a{}^b + B_a{}^b$$

(toți tensorii se consideră de același tip);

– înmulțirea unui tensor cu un scalar $C = \alpha A$

$$C^{pq} = \alpha A^{pq}; C_{rs} = \alpha A_{rs}; C^m{}_n = \alpha A^m{}_n; C_a{}^b = \alpha A_a{}^b;$$

– produs de compoziție $\mathbf{P} = \mathbf{TS}$

$$P^{pq} = T^{pr} S_r^q = T^p{}_n S^{nq}; P_{rs} = T_{ra} S^a{}_s = T_r{}^b S_{bs}$$

$$P^m{}_n = T^{mq} S_{qs} = T^m{}_a S^a{}_n; P_a{}^b = T_{as} S^{sb} = T_a{}^p S_p{}^b \text{ etc.}$$

(expresiile scrise sunt cele mai simple; altele se pot obține prin urcare sau coborâre de indici)

Fie în V bazele $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1,2,3}$ și $\{\mathbf{e}'_k\}_{k=1,2,3}$, schimbările de baze (date și reciproce) sunt caracterizate prin

$$\mathbf{e}_j = \alpha_j{}^k \mathbf{e}'_k, \quad \mathbf{e}'_p = \alpha'_p{}^q \mathbf{e}_q,$$

$$\mathbf{e}^s = \alpha'^s{}_r \mathbf{e}^r, \quad \mathbf{e}'^m = \alpha_n{}^m \mathbf{e}_m,$$

matricele $A = [\alpha_j{}^k]$ și $A' = [\alpha'_s{}^r]$ fiind inverse una celeilalte. Legătura dintre componentele (de același tip) în bazele asociate bazelor din V este data de relațiile:

$$T^{sr} = T'^{jk} \alpha'_j{}^s \alpha'_k{}^r \quad T = A'^T T' A'$$

$$T_{mn} = T'_{pq} \alpha_m{}^p \alpha_n{}^q \quad T = A T' A^T$$

$$T^s{}_b = T'^j{}_q \alpha'_j{}^s \alpha_b{}^q \quad T = A'^T T' A^T$$

$$T_a{}^r = T'_p{}^q \alpha_a{}^p \alpha'_q{}^r \quad T = A^T T' A'^T.$$

Definiție. Se numește *tensor transpus* $\mathbf{T}^T$ al unui tensor de ordinul al doilea tensorul de ordinul al doilea definit prin

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{u}.$$

Relația de definiție poate fi scrisă pe componente în baze asociate bazelor din V

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{e}_j \quad \mathbf{T}^T = T_{jk} \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j$$

$$\mathbf{e}^p \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}^q = \mathbf{e}^q \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{e}^p \quad \mathbf{T}^T = T^{pq} \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_p$$

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{e}^j \quad \mathbf{T}^T = T^j{}_q \mathbf{e}^q \otimes \mathbf{e}_j$$

$$\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}^m = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{T}^T \mathbf{e}_p \quad \mathbf{T}^T = T_p{}^m \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^p.$$

Definiție. Un tensor de ordinul al doilea este *simetric* dacă $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}$ și *antisimetric* dacă $\mathbf{T}^T = -\mathbf{T}$.

Notatii: $\text{Sim} = \{\mathbf{T} \in L_2, \mathbf{T}^T = \mathbf{T}\}$, $\text{Asim} = \{\mathbf{T} \in L_2, \mathbf{T}^T = -\mathbf{T}\}$.

Cele două mulțimi sunt subspații vectoriale ale L_2 . Tensorul nul $\mathbf{O}$ este singurul tensor care este și simetric și antisimetric. Tensorul identitate $\mathbf{1}$ este simetric.

Propoziție. Orice tensor de ordinul al doilea se descompune în mod unic ca sumă a unui tensor simetric și a unui tensor antisimetric.

Propoziție. Fie $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1,2,3}$ bază în V și $\{\mathbf{e}^k\}_{k=1,2,3}$ baza reciprocă. Atunci

$$\{\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j\}_{j,k=1,2,3}, \quad \{\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k + \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j\}_{j,k=1,2,3}, \quad \{\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k + \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}_j\}_{j,k=1,2,3}$$

sunt baze în *Sim*, iar

$$\{\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j\}_{j,k=1,2,3}, \quad \{\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k - \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^j\}_{j,k=1,2,3}, \quad \{\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k - \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}_j\}_{j,k=1,2,3}$$

sunt baze în *Asim*.

Propoziție. Produsul vectorial cu primul factor $\mathbf{a}$ fixat definește un tensor de ordinul al doilea antisimetric $\mathbf{A} : V \rightarrow V$, $\mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$.

Propoziție reciprocă. Oricărui tensor de ordinul al doilea antisimetric $\mathbf{i}$ se asociază în mod unic un vector - numit *vector axial* - $\mathbf{a}$ astfel încât $\mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$.

Definiție. Se numește *urma* (trace) aplicația lineară $\text{tr} : L_2 \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V.$$

Se obține

$$\text{tr} \mathbf{T} = T_{jk} \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k = T^{jk} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = T_j^j = T^p_p.$$

Propoziție. Urma unui tensor nu depinde de baza în care se calculează.

Definiție. Determinantul este aplicația $\det : L_2 \rightarrow \mathbf{R}$ cu

$$\det \mathbf{T} = \det T,$$

T matricea asociată într-o bază mixtă.

Propoziție. Valoarea determinantului nu depinde de baza în care se asociază matricea.

Definiție. Un tensor de ordinul al doilea $\mathbf{T}$ este *degenerat (singular)* dacă $\det \mathbf{T} = 0$ și *nedeGenerat (nesingular)* în caz contrar.

Definiție. Se numește *invers* al unui tensor de ordinul al doilea nesingular $\mathbf{T}$ un tensor de ordinul al doilea $\mathbf{T}^{-1}$ definit prin

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{u}.$$

Matricele asociate celor doi tensori sunt matrice inverse

$$T_{ij}T^{-1jk} = \delta_i^k, T^{-1pq}T_{qr} = \delta^p_r \quad \text{sau} \quad \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{1}.$$

Definiție. Produsul scalar este aplicația $\cdot : L_2 \times L_2 \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{U}) \quad \forall \mathbf{T}, \mathbf{U} \in L_2.$$

Proprietăți:

s1) produsul scalar este comutativ

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{T} \quad \forall \mathbf{T}, \mathbf{U} \in L_2;$$

s2) produsul scalar linear în fiecare factor

$$\mathbf{T} \cdot (\alpha_1 \mathbf{U}_1 + \alpha_2 \mathbf{U}_2) = \alpha_1 \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_1 + \alpha_2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_2 \quad \forall \mathbf{T}, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in L_2, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R};$$

s3) $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \geq 0 \quad \forall \mathbf{T} \in L_2;$

s4) $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{T} = \mathbf{O}.$

Definiție. Norma este aplicația $\| \cdot \| : L_2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ definită prin

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}} \quad \forall \mathbf{T} \in L_2.$$

Observație. Norma provine din produs scalar și nu este necesar să se mai verifice proprietățile.

Propoziție. $\mathbf{S} \in \text{Sim}, \mathbf{A} \in \text{Asim} \Rightarrow \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = 0.$

Propoziție. $\|\mathbf{T}\|^2 = \|\mathbf{T}^S\|^2 + \|\mathbf{T}^A\|^2 \quad \forall \mathbf{T} \in L_2. \quad \mathbf{T}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T), \quad \mathbf{T}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T).$

Propoziție. Dacă $\{\mathbf{i}_j\}_{j=1,2,3}$ este o bază ortonormată în V , atunci

a) $\{\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k\}_{j,k=1,2,3}$ este bază ortonormată în L_2 ;

b) în *Sim* elementele bazei ortonormate au forma $\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_j$ pentru indici egali și respectiv $(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k + \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_j)/\sqrt{2}$ pentru indici distincți ;

c) în *Asim* elementele bazei au forma $(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k - \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_j)/\sqrt{2}.$

Definiție. λ este *valoare proprie*, $\mathbf{v}$ este *vector propriu* pentru un tensor de ordinul al doilea $\mathbf{T}$, dacă

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Dacă $\mathbf{v}$ este unitar se numește *direcție proprie*.

Mulțimea vectorilor proprii corespunzător unei valori proprii alcătuiesc un spațiu caracteristic al tensorului $\mathbf{T}$, subspațiu vectorial al lui V .

Propoziția 1. Valorile proprii ale tensorului $\mathbf{T}$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice (seculare)

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) = 0.$$

Observația 1. Ecuația caracteristică nu depinde de baza mixtă în care se face descompunerea tensorului.

Observația 2. Ecuația caracteristică este o ecuație de gradul al treilea și admite cel puțin o rădăcină reală; prin urmare orice tensor de ordinul al doilea are cel puțin o valoare proprie reală și cel mult trei.

Propoziția 2. Dacă tensorul de ordinul al doilea este simetric, atunci

- a) toate valorile proprii sunt reale;
- b) direcțiile proprii ce corespund unor valori proprii distincte sunt ortogonale.

Propoziția 3. Valorile proprii ale puterilor naturale ale unui tensor de ordinul al doilea sunt puterile corespunzătoare ale valorilor proprii ale tensorului; orice direcție proprie a tensorului considerat este direcție proprie pentru orice putere naturală a sa.

Propoziția 4. Valorile proprii ale inversului unui tensor de ordinul al doilea nesingular sunt inversele valorilor proprii ale tensorului $\mathbf{T}$. $\mathbf{T}^{-1}$ are aceleași direcții proprii ca și $\mathbf{T}$.

Propoziția 5. Doi tensori care diferă printr-un tensor proporțional cu tensorul unitate au aceleași direcții proprii.

Teorema de descompunere spectrală. Dacă $\mathbf{T}$ este un tensor de ordinul al doilea simetric, având valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, atunci există o bază ortonormată $\{\mathbf{m}_j\}_{j=1,2,3}$ a lui V , astfel încât

$$\mathbf{T}\mathbf{m}_j = \lambda_j \mathbf{m}_j \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2 + \lambda_3 \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3$$

(descompunerea spectrală a tensorului $\mathbf{T}$).

Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ spațiile caracteristice sunt unidimensionale, drepte generate de direcțiile $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$.

Dacă $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ atunci $\mathbf{T}$ are numai două spații caracteristice distincte: spațiul unidimensional generat de $\mathbf{m}_1$ și spațiul bidimensional, planul normal la $\mathbf{m}_1$ și

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1 + \lambda_2 (\mathbf{1} - \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1).$$

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ atunci $\mathbf{T}$ admite un singur spațiu caracteristic ce coincide cu V și

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{1}.$$

Din observația 2 rezultă invarianța coeficienților ecuației caracteristice la schimbarea de baze ortonormate sau de baze oarecari mixte

$$\lambda^3 - I_T \lambda^2 + II_T \lambda - III_T = 0,$$

$$I_T = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = \text{tr} \mathbf{T},$$

$$II_T = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 = \begin{bmatrix} T_1^1 & T_1^2 \\ T_2^1 & T_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_2^2 & T_2^3 \\ T_3^2 & T_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^1 & T_1^3 \\ T_3^1 & T_3^3 \end{bmatrix} =,$$

$$= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{T})^2 - \text{tr}(\mathbf{T}^2)], \quad III_T = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det \mathbf{T}.$$

Definiție. Marimile I_T, II_T, III_T sunt *invarianții principali* (primul, al doilea, al treilea) ai tensorului $\mathbf{T}$.

Teorema Cayley-Hamilton. Tensorul $\mathbf{T}$ verifică ecuația

$$\mathbf{T}^3 - I_T \mathbf{T}^2 + II_T \mathbf{T} - III_T \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Consecință. Orice polinom în $\mathbf{T}$ are cel mult gradul doi.

Definiție. Se numește *tensor sferic* un tensor de ordinul al doilea proporțional cu tensorul unitate.

Definiție. Se numește *tensor deviator* un tensor de ordinul al doilea simetric $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'^T$ cu urma nulă $\text{tr } \mathbf{T}' = 0$.

Propoziție. Orice tensor de ordinul al doilea simetric admite o descompunere aditivă unică în suma unui tensor sferic și un tensor deviator.

Observație. Tensorul deviator asociat prin descompunerea de mai sus "măsoară" devierea tensorului de la un tensor sferic. Direcțiile proprii ale unui tensor simetric coincid cu direcțiile deviatorului sau.

Definiție. Un tensor simetric $\mathbf{T}$ se numește *pozitiv definit* dacă

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V - \{\mathbf{o}\}.$$

Notăție.

$$Psim = \{\mathbf{T} \in Sim, \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{o}\}$$

Propoziție. Un tensor simetric pozitiv definit este nesingular, toate valorile sale proprii sunt strict pozitive.

$D \subseteq E$ domeniu

Definiție. Se numește *câmp scalar* aplicația $\varphi : D \rightarrow R$.

Se numește *câmp vectorial* aplicația $\mathbf{v} : D \rightarrow V$.

Se numește *câmp tensorial* aplicația $\mathbf{T} : D \rightarrow L_2$.

MECANICA NEWTONEANA A SISTEMELOR MATERIALE RIGIDE

Definiție. Un sistem de puncte materiale este *rigid* dacă în timpul mișcării nu se modifică distanțele și unghiurile: oricare ar fi punctele materiale ale sistemului P, Q respectiv R, având în raport cu un referențial inerțial vectorii de poziție $\mathbf{X}_P$, $\mathbf{X}_Q$ respectiv $\mathbf{X}_R$

$$(\mathbf{X}_Q - \mathbf{X}_P) \cdot (\mathbf{X}_R - \mathbf{X}_P) = \text{const.}$$

($Q \equiv R \neq P$ relația caracterizează păstrarea distanțelor, pentru trei puncte distincte - păstrarea unghiurilor).

Observație. Este suficient să se presupună păstrarea distanțelor, pentru că se formează triunghiuri nedeformabile (triunghiurile sunt singurile figuri geometrice ce pot fi caracterizate numai prin laturi) sau sisteme colineare de puncte materiale, unde nu se pune în mod special problema unghiurilor.

PRINCIPIILE MECANICII NEWTONEENE A SISTEMELOR MATERIALE RIGIDE CONTINUE

i) *Spațiul fizic* ca suport al materiei, omogen și izotrop, independent de materie, este spațiul euclidian E_3 .

Timpul este unidimensional, omogen și ireversibil, transmiterea semnalelor se face instantaneu.

ii) *Mișcarea* unui sistem material rigid înseamnă modificarea distanțelor față de alte sisteme materiale presupuse fixe.

Reper sau sistem de referință este un sistem rigid format din cel puțin trei puncte necoliniare.

Elementele ce caracterizează mișcarea unui sistem material rigid sunt *vectorul de poziție* al unui punct precizat A solidar cu sistemul rigid, *unghiurile lui Euler* care definesc poziția unui reper solidar cu sistemul rigid în acest punct în raport cu direcțiile ce definesc un reper inerțial, cu *distribuția de viteze și accelerații* (care fac obiectul cinematicii sistemelor rigide).

iii) *Axiomele masei*

Fie un sistem material rigid continuu și $Ax^1x^2x^3$ un reper solidar legat cu acesta și în raport cu care solidul ocupă domeniul D_A . Distribuția masei în corp este caracterizată prin mărimile

- *masa totală* (mărime scalară)

$$M = \int_{D_A} dm,$$

- *vectorul de poziție al centrului de masă* al solidului în raport cu punctul A (mărime vectorială)

$$M \mathbf{x}_C = \int_{D_A} \mathbf{x} dm,$$

- *tensorul de inerție în raport cu punctul A (câmp tensorial)*

$$\mathbf{I}_A = \int_{D_A} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{1} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}] dm,$$

unde integrarea se face în raport cu *măsura pozitivă* m , prin $\mathbf{x}$ notându-se vectorul de poziție față de A al punctului material curent al solidului în reperul considerat $\mathbf{x} = x^j \mathbf{t}_j$.

iv) *Forțele* exprimă interacțiunea sistemelor materiale rigide și determină mișcarea lor;
 - forțele sunt vectori alunecători;
 - acțiunea unui sistem de forțe se poate înlocui cu acțiunea altui sistem de forțe și momente, care se obține din primul prin operații de echivalență.

v) *Principiile de mișcare:* mișcarea este guvernată de
 - *principiul de bilanț al impulsului:* în timpul mișcării, derivata în raport cu timpul (față de un reper inerțial $OX^1X^2X^3$) a impulsului total este egală cu rezultanta forțelor care acționează asupra sistemului

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{H} = \int_{D(t)} \mathbf{V} dm, \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j + \int_{D(t)} \mathbf{f} dm;$$

- *principiul de bilanț al momentului cinetic:* în timpul mișcării, derivata în raport cu timpul (față de un reper inerțial $OX^1X^2X^3$) a momentului cinetic total este egală cu momentul resultant care acționează asupra sistemului

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O, \quad \mathbf{K}_O = \int_{D(t)} \mathbf{X} \times \mathbf{V} dm, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{j=1}^N \mathbf{X}_j \times \mathbf{F}_j + \int_{D(t)} \mathbf{X} \times \mathbf{f} dm + \mathbf{M}'_O;$$

$D(t)$ este domeniul ocupat de sistemul rigid în raport cu reperul inerțial.

vi) *Principiul acțiunii și reacțiunii:* acțiunile reciproce (forțe și momente) a două sisteme materiale rigide au torsi rezultat nul.

vii) *Principiul condițiilor inițiale:* Starea inițială a sistemului rigid ($t_0; \mathbf{X}_A^0, \psi^0, \varphi^0, \theta^0; \mathbf{V}_A^0, \omega^0$) determină starea ulterioară a acestuia - soluția problemei Cauchy asociată principiilor de mișcare există și este unică.

viii) *Principiul newtorean al relativității:* principiile de mișcare sunt invariante la transformările din grupul lui Galilei.

0.1. Un sistem material rigid liber, format din două puncte are cinci grade de libertate.

Fie P_1 și P_2 punctele sistemului material rigid. Condiția de rigiditate se reduce la

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^2 = \text{const.}$$

Această condiție este o relație scalară între cele șase coordonate ale punctelor

$$\sum_{j=1}^3 \left(X_1^j - X_2^j \right)^2 = \text{const.}$$

astfel încât cele șase coordonate nu sunt independente, una dintre coordonate putându-se exprima prin intermediul celorlalte cinci, deci, ne mai fiind alte restricții impuse mișcării, sistemul are cinci grade de libertate.

0.2. Orice sistem material rigid liber, format din puncte materiale coliniare are cinci grade de libertate.

Fie două puncte ale sistemului. Cele șase coordonate ale lui sunt legate prin condiția de rigiditate, deci numai cinci sunt independente. Considerând acum încă un punct al sistemului, coordonatele acestui punct pot fi exprimate, datorită condiției de coliniaritate, sub forma

$$X_3^j = \lambda X_1^j + (1 - \lambda) X_2^j \quad j = 1, 2, 3$$

parametrul λ fiind constant, pentru a respecta condiția de rigiditate. Deci sistemul rămâne cu cinci grade de libertate, pentru că

$$(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1)^2 = (1 - \lambda)^2 (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)^2.$$

Presupunând că un subsistem al sistemului material rigid are cinci grade de libertate, adăugând încă un punct, ca și mai înainte, nu se introduc parametrii noi care să caracterizeze poziția sistemului, deci acesta rămâne cu cinci grade de libertate.

0.3. Un sistem material rigid liber, format din trei puncte necoliniare, are șase grade de libertate.

Coordonatele celor trei puncte ale sistemului material rigid liber verifică condițiile de rigiditate independente

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2)^2 = \text{const.}, (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_3)^2 = \text{const.}, (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_1)^2 = \text{const.};$$

prin urmare cele 9 coordonate ale punctelor sistemului sunt legate prin trei relații scalare independente, deci sistemul are $9 - 3 = 6$ grade de libertate.

0.4. Un sistem material rigid liber, conținând trei puncte necolineare, are șase grade de libertate.

Subsistemul format din cele trei puncte necolineare are șase grade de libertate. Adăugând un al patrulea punct al sistemului, cele trei coordonate ale acestuia satisfac trei condiții de rigiditate independente

$$(\mathbf{X}_4 - \mathbf{X}_k)^2 = \text{const.} \quad k = 1, 2, 3$$

prin urmare sistemul format din cele patru puncte (dintre care trei au fost necolineare) rămâne cu $(6 + 3) - 3 = 6$ grade de libertate.

Presupunând că un subsistem al sistemului considerat, incluzând cele trei puncte necoliniare, are șase grade de libertate, prin adăugarea a încă unui punct din sistem, sunt suficiente trei condiții de rigiditate care să lege coordonatele acestui punct de coordonatele celor trei puncte necoliniare; deci sistemul continuă să aibă $(6 + 3) - 3 = 6$ grade de libertate.



ELEMENTE DE CINETICA

Fie un corp solid rigid și $Ax^1x^2x^3$ un reper solidar legat cu acesta și în raport cu care solidul ocupă domeniul D_A . Distribuția masei în corp este caracterizată prin
- *masa totală* (mărime scalară)

$$M = \int_{D_A} dm;$$

- *vectorul de poziție al centrului de masă C* al corpului în raport cu punctul A (mărime vectorială)

$$\mathbf{x}_C = \frac{1}{M} \int_{D_A} \mathbf{x} dm, \quad Mx_C^j = \int_{D_A} x^j dm \quad j = 1, 2, 3;$$

- *tensorul de inerție în raport cu punctul o* (mărime tensorială)

$$\mathbf{I}_A = \int_{D_A} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\mathbf{1} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}] dm, \quad I_A^{jk} = \int_{D_A} [x^s x^s \delta^{jk} - x^j x^k] dm \quad j, k = 1, 2, 3;$$

integrarea se face în raport cu măsura pozitivă m , prin $\mathbf{x}$ notându-se vectorul de poziție față de A al punctului material curent al corpului în reperul considerat

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{t}_k.$$

Pentru cazul în care anumite dimensiuni ale corpului predomină în raport cu celelalte, se disting trei situații:

1) o dimensiune predomină în raport cu celelalte - bară zveltă - domeniul D_A este pus în corespondență cu curba

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u) \quad u \in [a, b],$$

distribuția locală de masă fiind dată prin densitatea lineară (masa pe unitatea de lungime) $\rho(\mathbf{x})$, mărimile caracteristice se obțin din relațiile

$$M = \int_a^b \rho(\mathbf{x}(u)) \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{du} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{du}} du,$$

$$M \mathbf{x}_C = \int_a^b \mathbf{x}(u) \rho(\mathbf{x}(u)) \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{du} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{du}} du,$$

$$\mathbf{I}_A = \int_a^b [(\mathbf{x}(u) \cdot \mathbf{x}(u))\mathbf{1} - \mathbf{x}(u) \otimes \mathbf{x}(u)] \rho(\mathbf{x}(u)) \sqrt{\frac{d\mathbf{x}}{du} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{du}} du;$$

2) două dimensiuni predomină în raport cu cea de a treia - placă - domeniul D_A este pus în corespondență cu un domeniu bidimensional pe o suprafață

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \quad (u, v) \in \Delta_2 \subset R^2,$$

distribuția locală de masă fiind dată de densitatea superficială (masa pe unitatea de arie) $\rho(\mathbf{x})$, mărimile caracteristice se obțin din relațiile

$$M = \iint_{\Delta_2} \rho(\mathbf{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| du dv,$$

$$M \mathbf{x}_C = \iint_{\Delta_2} \mathbf{x}(u, v) \rho(\mathbf{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| du dv,$$

$$\mathbf{I}_A = \iint_{\Delta_2} [(\mathbf{x}(u, v) \cdot \mathbf{x}(u, v))\mathbf{1} - \mathbf{x}(u, v) \otimes \mathbf{x}(u, v)] \rho(\mathbf{x}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| du dv;$$

3) pe trei direcții necoplanare dimensiunile au același ordin de mărime - bloc sau corp masiv - domeniul D_A este un domeniu tridimensional

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, w) \quad (u, v, w) \in \Delta_3 \subset R^3,$$

distribuția locală de masă fiind dată de densitatea volumică (masa pe unitatea de volum) $\rho(\mathbf{x})$, mărimile caracteristice se obțin din relațiile

$$M = \iiint_{\Delta_3} \rho(\mathbf{x}(u, v, w)) J(u, v, w) du dv dw,$$

$$M \mathbf{x}_C = \iiint_{\Delta_3} \mathbf{x}(u, v, w) \rho(\mathbf{x}(u, v, w)) J(u, v, w) du dv dw,$$

$$\mathbf{I}_A = \iiint_{\Delta_3} [(\mathbf{x}(u, v, w) \cdot \mathbf{x}(u, v, w))\mathbf{1} - \mathbf{x}(u, v, w) \otimes \mathbf{x}(u, v, w)] \rho(\mathbf{x}(u, v, w)) J(u, v, w) du dv dw;$$

$$J(u, v, w) = \left| \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial w} \right) \right|.$$

Mărima pozitivă a masei nu depinde de alegerea reperului solidar cu rigidul. Poziția centrului de masă C în corp nu depinde de alegerea reperului solidar cu rigidul, vectorul de poziție al acestuia depinde numai de originea reperului ales $\mathbf{x}_C = \overrightarrow{AC}$. Dependența tensorului de inerție de originea reperului solidar cu rigidul a fost marcată prin indicele inferior atașat. La schimbarea originii reperului se poate utiliza teorema lui Steiner

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_C + M[(\mathbf{x}_C \cdot \mathbf{x}_C)\mathbf{1} - \mathbf{x}_C \otimes \mathbf{x}_C].$$

Schimbarea orientării axelor reperului (cu păstrarea originii)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \mathbf{Q} \in Ort, \quad x'^j = Q^j_k x^k$$

tensorul ortogonal $\mathbf{Q}$ dând rotația relativă a reperului $Ax'^1 x'^2 x'^3$ față de $Ax^1 x^2 x^3$, permite calcularea componentelor tensorului de inerție prin

$$I'_A = \mathbf{Q} \mathbf{I}_A \mathbf{Q}^T, \quad I'^{jk}_O = Q^j_p Q^k_s I^{ps}_O.$$

Momentele principale de inerție în O sunt rădăcinile (reale și nenegative) ale ecuației caracteristice

$$\det(\mathbf{I}_A - I \mathbf{1}) = 0 \quad \left(\det(I^{jk}_A - I \delta^{jk}) = 0 \right).$$

Direcțiile principale de inerție se obțin determinând pentru fiecare rădăcină soluțiile sistemului

$$\begin{cases} [I^{jk}_A - I \delta^{jk}] n_k = 0 & j = 1, 2, 3 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}.$$

2.1. Să se arate că tensorul de inerție într-un punct este simetric.

Se verifică definiția unui tensor simetric

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_A \mathbf{v} = \int_{D_A} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})] dm = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}_A \mathbf{u}.$$

2.2. Să se arate că tensorul de inerție într-un punct este simetric pozitiv definit dacă și numai dacă sistemul material rigid nu este format numai din puncte colineare. Consecințe asupra valorilor proprii.

Se obține din rezultatul de la problema precedentă

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_A \mathbf{u} = \int_{D_A} [(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})^2] dm = \int_{D_A} (\mathbf{x} \times \mathbf{u})^2 dm \geq 0.$$

In plus

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{I}_A \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \text{ vector de pozitie al } P \in D_A.$$

deci tensorul de inerție într-un punct este simetric pozitiv definit în cazul sistemelor rigide necoliniare și numai atunci.

Valorile proprii ale unui tensor simetric pozitiv definit sunt toate reale strict pozitive, iar tensorul este nedegenerat pentru că

$$\det \mathbf{I}_A = I_A^1 I_A^2 I_A^3 > 0.$$

In cazul asimilării unei bare zvelte cu un segment v. problema 2.6.

2.3. Fie o semisferă (plină) omogenă de rază R și densitate ρ_o .

1°. Să se determine poziția centrului de masă C în raport cu centrul semisferei O .

2°. Să se determine momentele de inerție în raport cu centrul semisferei O .

3°. Să se determine momentele de inerție în raport cu centrul de masă C .

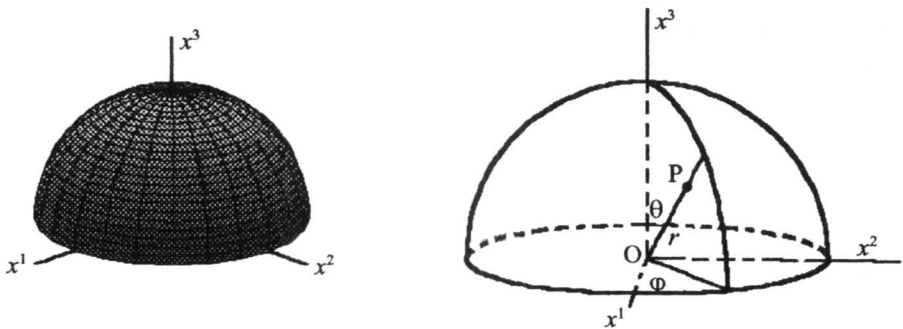


Figura 2.3

$$D_O = \{(x^1, x^2, x^3). (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq R^2, x^3 \geq 0\},$$

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \varphi & r \in [0, R] \\ x^2 = r \sin \theta \sin \varphi & \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x^3 = r \cos \theta & \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}, \quad \Delta_3 = [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi], \quad J = r^2 \sin \theta$$

1°. Masa semisferei

$$M = \rho_o \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi}{3} \rho_o R^3.$$

Centrul de masă se găsește pe axa de simetrie

$$x_C^1 = x_C^2 = 0, \quad x_C^3 = \frac{1}{M} \rho_o \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{3}{8} R.$$

2°. Axa de simetrie a semisferei este axă principală a tensorului de inție în raport cu punctul O ; orice direcție în planul ecuatorial este de asemenea axă principală a tensorului de inerție în raport cu O . Deci

$$I_O^{11} = I_O^{22} = I_O^{33} = \frac{2}{5}MR^2, I_O^{12} = I_O^{23} = I_O^{31} = 0.$$

3°. Tensorul de inerție în punctul C admite ca direcții principale axa de simetrie și orice axă perpendiculară pe axa de simetrie. Componentele tensorului de inerție în C vor fi

$$I_C^{11} = I_C^{22} = \frac{83}{320}MR^2, I_C^{33} = \frac{2}{5}MR^2, I_C^{12} = I_C^{23} = I_C^{31} = 0.$$

2.4. Se consideră un solid omogen limitat de trei plane principale ale unui elipsoid și de acest elipsoid. Să se determine centrul de masă al solidului și tensorul central de inerție. Este posibil ca dreapta OC unind centrul de masă C cu vârful O al tetraedrului să fie axă principală de inerție în raport cu C?

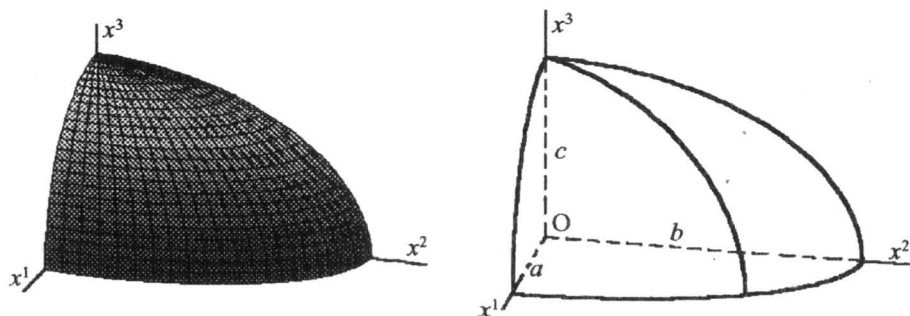


Figura 2.4

$$D_O = \left\{ (x^1, x^2, x^3), \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{c^2} \leq 1, x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, x^3 \geq 0 \right\},$$

$$\begin{cases} x^1 = ar \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = br \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = cr \cos \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} r \in [0, 1] \\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{matrix}, \Delta_3 = [0, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$J = abcr^2 \sin \theta.$$

Masa optimii de elipsoid este

$$M = \frac{\pi}{6} \rho_0 abc.$$

Coordonatele centrului de masă sunt

$$x_C^1 = \frac{3}{8}a, x_C^2 = \frac{3}{8}b, x_C^3 = \frac{3}{8}c.$$

Tensorul de inerție în raport cu punctul O are componentele

$$I_O^{11} = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2), I_O^{22} = \frac{1}{5}M(c^2 + a^2), I_O^{33} = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2),$$

$$I_O^{12} = -\frac{2}{5\pi}Mab, I_O^{23} = -\frac{2}{5\pi}Mbc, I_O^{31} = -\frac{2}{5\pi}Mca.$$

Rezultă tensorul de inerție în raport cu punctul C

$$I_C^{11} = \frac{19}{320}M(b^2 + c^2), I_C^{22} = \frac{19}{320}M(c^2 + a^2), I_C^{33} = \frac{19}{320}M(a^2 + b^2),$$

$$I_C^{12} = -\left(\frac{2}{5\pi} - \frac{9}{64}\right)Mab, I_C^{23} = -\left(\frac{2}{5\pi} - \frac{9}{64}\right)Mbc, I_C^{31} = -\left(\frac{2}{5\pi} - \frac{9}{64}\right)Mca.$$

Cosinușii directori ai dreptei OC sunt

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

deci momentul de inerție în raport cu dreapta OC va fi

$$I_{OC} = \frac{19}{320}M \frac{(b^2 + c^2)a^2 + (c^2 + a^2)b^2 + (a^2 + b^2)c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \\ -2\left(\frac{2}{5\pi} - \frac{9}{64}\right)M \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{5\pi}\right)M \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pentru ca axa OC să fie axă principală de inerție prin C, momentul I_{OC} trebuie să fie rădăcină a ecuației caracteristice, adică

$$\det(I_C^{jk} - I_{OC}\delta^{jk}) = 0.$$

Acest fapt este posibil dacă

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + a^2$$

adică în cazul în care semiaxele elipsoidului sunt egale, deci când elipsoidul este sferă.

2.5. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu una din muchiile unui tetraedru regulat solid omogen.

Fie a lungimea unei muchii a tetraedrului și ρ_0 densitatea. Masa tetraedrului va fi

$$M = \frac{\sqrt{2}}{12}\rho_0 a^3.$$

Fie O mijlocul muchiei AB și axa Ox^3 coincide cu muchia OA ; axa Ox^1 este mediana OE în triunghiul OCD , iar Ox^2 este perpendiculara prin O pe celelalte axe. Momentul de inerție în raport cu Ox^3 este de patru ori momentul de inerție în raport cu Ox^3 al tetraedrului $OACE$ delimitat de planele

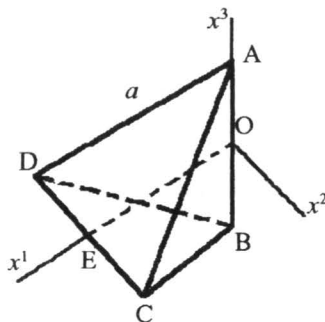


Figura 2.5

$$\begin{cases} x^3 = 0 & (\text{plan } Ox^1x^2) \\ x^1\sqrt{2} + 2x^3 = 0 & (\text{plan } CAE) \\ x^2 = 0 & (\text{plan } Ox^1x^3) \\ x^2\sqrt{2} = x^1 & (\text{plan } OAC) \end{cases}$$

Atunci

$$I_O^{33} = 4\rho_0 \iiint_{OACE} [(x^1)^2 + (x^2)^2] dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{7}{40}Ma^2.$$

2.6. Masa, poziția centrului de masă și momente de inerție pentru următoarele corpuri omogene:

- 1) bara rectilinie de lungime l ;
- 2) arc de cerc de rază r și deschidere 2α .

1) Bara rectilie de lungime l

$$M = \int_0^l \rho_o d\xi = \rho_o l; \quad x_C^1 = x_C^2 = \int_0^l \rho_o 0 d\xi = 0,$$

$$x_C^3 = \frac{1}{M} \int_0^l \rho_o \xi d\xi = \frac{1}{2M} \rho_o l^2 = \frac{1}{2} l;$$

$$I_O^1 = I_O^2 = \int_0^l \rho_o \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} M l^2, I_O^3 = \int_0^l \rho_o 0 d\xi = 0.$$

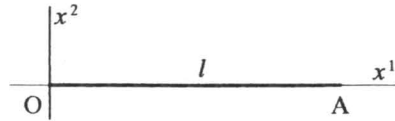


Figura 2.6.1

2) Arc de cerc de rază r și deschidere 2α

$$M = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r d\theta = 2\rho_o \alpha;$$

$$x_C^1 = \frac{1}{M} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r^2 \cos \theta d\theta = \frac{r \sin \alpha}{\alpha},$$

$$x_C^2 = \frac{1}{M} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r^2 \sin \theta d\theta = 0, \quad x_C^3 = \frac{1}{M} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r 0 d\theta = 0;$$

$$I_O^1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r^3 \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} M r^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

$$I_O^2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r^3 \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} M r^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), I_O^3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho_o r^3 d\theta = M r^2.$$

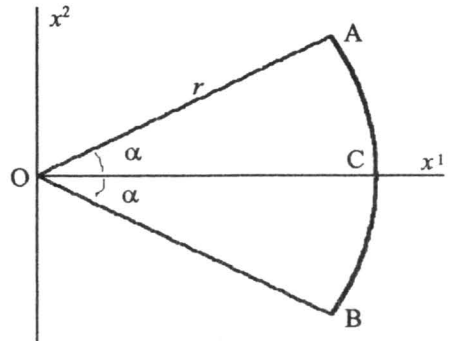


Figura 2.6.2

2.7. Masa, poziția centrului de masă și momente de inerție pentru următoarele corpuri omogene:

- 1) placa triunghiulară de laturi a, b, c ,
- 2) placa dreptunghiulară de laturi $2a$ și $2b$,
- 3) sector de cerc de rază r și deschidere 2α ,
- 4) segment de cerc de rază r și deschidere 2α ,
- 5) porțiune de coroană circulară de raze r, R și deschidere 2α .

1) Placa triunghiulară de laturi a, b, c .

$$A \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}, \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, 0 \right),$$

$$B(0, 0, 0), C(a, 0, 0),$$

$$2p = a + b + c,$$

$$M = \iint_{\Delta} \rho_o dx^1 dx^2 =$$

$$= \rho_o \int_0^a \left[\frac{x_A^2}{x_A^1} x^1 - \frac{x_A^2}{x_A^1 - x_C^1} (x^1 - x_C^1) \right] dx^1 =$$

$$= \rho_o \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$x_G^1 = \frac{1}{3} (x_A^1 + c), x_G^2 = \frac{1}{3} x_A^2, x_G^3 = 0 \text{ (centrul de masă notat G)}$$

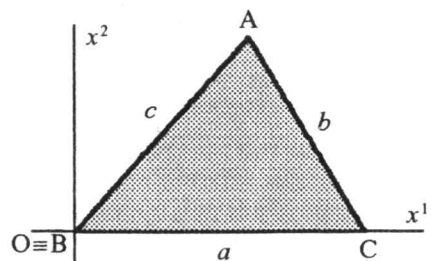


Figura 2.7.1

$$I_B^{11} = \frac{1}{3} \rho_o \int_0^a \left[\left(\frac{x_A^2}{x_A^1} x^1 \right)^3 - \left(\frac{x_A^2}{x_A^1 - x_C^1} (x^1 - x_C^1) \right)^3 \right] dx^1 = \dots = \frac{1}{6} M (x_A^2)^2,$$

$$I_B^{22} = \rho_o \int_0^a \left[\frac{x_A^2}{x_A^1} x^1 - \frac{x_A^2}{x_A^1 - x_C^1} (x^1 - x_C^1) \right] (x^1)^2 dx^1 = \dots = \frac{1}{6} M \left[a^2 + a x_A^1 + (x_A^1)^2 \right],$$

$$I_B^{33} = I_B^{11} + I_B^{22} = \dots = \frac{1}{6} M (a^2 + c^2 + a x_A^1),$$

$$I_B^{13} = I_B^{23} = 0, I_B^{12} = -\rho_o \int_0^a \left[\frac{x_A^2}{x_A^1} x^1 - \frac{x_A^2}{x_A^1 - x_C^1} (x^1 - x_C^1) \right] x^1 dx^1 = \dots = -\frac{1}{12} M x_A^2 (a + 2x_A^1).$$

2) Placa dreptunghiulară de laturi a și b

$$M = \rho_o \int_0^a dx^1 \int_0^b dx^2 = \rho_o ab,$$

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{0},$$

$$I_O^1 = \rho_o \int_0^a dx^1 \int_0^b (x^2)^2 dx^2 = \frac{1}{3} M b^2,$$

$$I_O^2 = \frac{1}{3} M a^2, I_O^3 = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2).$$

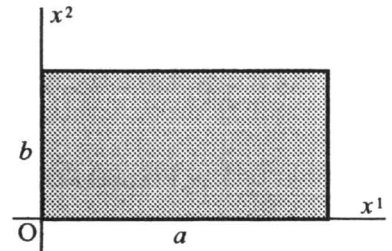


Figura 2.7.2

3) Sector de cerc de rază r și deschidere 2α

$$M = \rho_o \iint_{\Delta} u du d\theta = \rho_o \int_0^r u du \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta = \rho_o r^2 \alpha;$$

$$x_C^1 = \frac{1}{M} \rho_o \int_0^r u^2 du \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}, x_C^2 = x_C^3 = 0;$$

$$I_O^1 = \rho_o \int_0^r u^3 du \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} M r^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

$$I_O^2 = \rho_o \int_0^r u^3 du \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} M r^2 \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

$$I_O^3 = I_O^1 + I_O^2 = \frac{1}{2} M r^2.$$

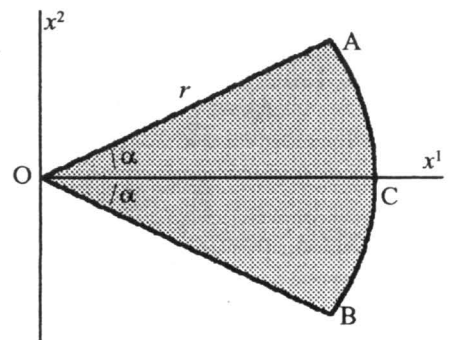


Figura 2.7.3

4) Segment de cerc de rază r și deschidere 2α : pentru calcul se utilizează rezultatele obținute pentru placa triunghiulară și sectorul circular, ținând seama de aditivitatea în raport cu măsura masă

$$M = \frac{1}{2} \rho_o r^2 (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

$$x_C^1 = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}, x_C^2 = x_C^3 = 0,$$

$$I_O^1 = \frac{1}{24} M r^2 \left[6 - \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right],$$

$$I_O^2 = \frac{1}{24} M r^2 \left[6 + \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right], I_O^3 = \frac{1}{2} M r^2.$$

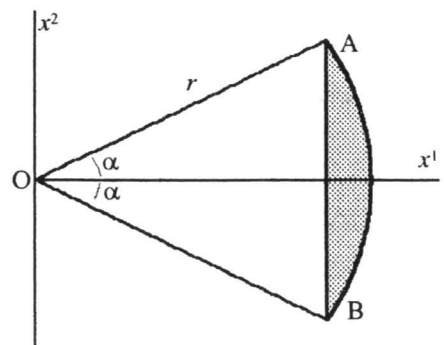


Figura 2.7.4

5) Porțiune de coroană circulară de raze r , R și deschidere 2α : pentru calcul se utilizează rezultatele obținute pentru sectorul circular cu $\alpha = \pi$ și se ține seama de aditivitatea în raport cu măsura *masă*

$$M = \rho_o(R^2 - r^2)\alpha,$$

$$x_C^1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r}, x_C^2 = x_C^3 = 0,$$

$$I_O^1 = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2)\left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right),$$

$$I_O^2 = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2)\left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right),$$

$$I_O^3 = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2).$$

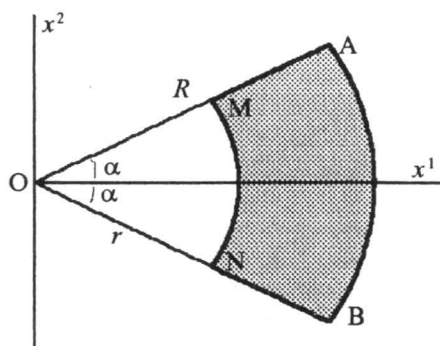


Figura 2.7.5

2.8. Masa, poziția centrului de masă și momente de inerție pentru corpurile omogene:

- 1) calotă sferică pe sfera de rază r de înălțime h ,
- 2) zonă sferică pe sfera de rază r , având înălțimea $h = h_1 - h_2$.

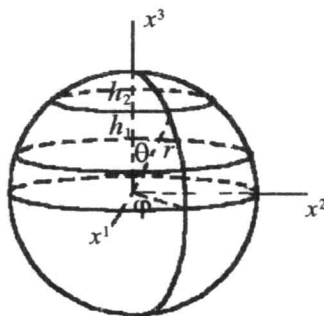
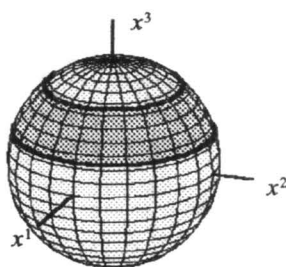


Figura 2.8

1) Fie porțiunea din suprafața sferei de rază r rezultând prin secționarea sferei cu un plan, astfel încât distanța pe normală la sferă este h

$$\begin{cases} x^1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = r \cos \theta \end{cases}; \Delta_2 = [0, \alpha] \times [0, 2\pi], \cos \alpha = \frac{r-h}{r},$$

$$M = \rho_o r^2 \iint_{\Delta_2} \sin \theta d\theta d\varphi = \rho_o r^2 \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \rho_o r h,$$

$$x_C^1 = x_C^2 = 0, x_C^3 = \frac{1}{M} r^3 \int_0^\alpha \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}(2r - h),$$

$$I_O^{11} = I_O^{22} = \rho_o r^4 \iint_{\Delta_2} [\sin^3 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi] d\theta d\varphi = \frac{1}{6}M(6r^2 - 3rh + h^2),$$

$$I_O^{33} = \rho_o r^4 \int_0^\alpha \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3}Mh(3r - h).$$

2) Se aplică rezultatele de mai sus și aditivitatea în raport cu măsura *masă*

$$M = M_1 - M_2 = 2\pi \rho_o r(h_1 - h_2),$$

$$x_C^1 = x_C^2 = 0, \quad x_C^3 = \frac{1}{2M}[M_1(2r - h_1) - M_2(2r - h_2)] = r - \frac{h_1 + h_2}{2},$$

$$I_O^{11} = I_O^{22} = \frac{1}{6} \left[M_1(6r^2 - 3rh_1 + h_1^2) - M_2(6r^2 - 3rh_2 + h_2^2) \right] =$$

$$= \frac{1}{6} M \left[6r^2 - 3r(h_1 + h_2) + (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) \right],$$

$$I_O^{33} = \frac{1}{3} [M_1h_1(3r - h_1) - M_2h_2(3r - h_2)] = \frac{1}{3} M \left[3r(h_1 + h_2) - (h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) \right].$$

2.9. Masa, poziția centrului de masă și momente de inerție pentru corpurile omogene:

- 1) paralelipiped de muchii a, b, c
- 2) cilindru circular de rază r și înălțime h
- 3) piramida dreptunghiulară cu laturi a, b și înălțime h
- 4) con circular de rază r și înălțime h
- 5) sfera de rază r
- 6) coroana sferică de raze r, R
- 7) sector sferic de rază r și înălțime h .

1) Paralelipiped de muchii a, b, c : calculele sunt similare celor din cazul plăcii dreptunghiulare

$$M = \rho_o abc,$$

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{0},$$

$$I_O^1 = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2),$$

$$I_O^2 = \frac{1}{12} M(c^2 + a^2),$$

$$I_O^3 = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2).$$

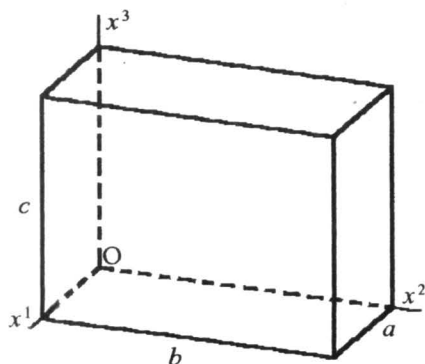


Figura 2.9.1

2) Cilindru circular de rază r și înălțime h

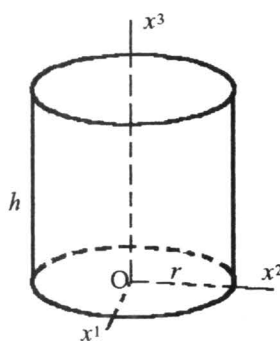
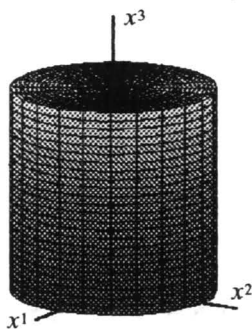


Figura 2.9.2

$$M = \pi \rho_o r^2 h, \quad \mathbf{x}_C = \mathbf{0},$$

$$I_O^1 = I_O^2 = \frac{1}{12} M(3r^2 + h^2), \quad I_O^3 = \frac{1}{2} M r^2.$$

3) Piramida dreptunghiulară cu laturi a, b și înălțime h

$$M = \frac{1}{3} \rho_o abh, \quad x_C^1 = x_C^2 = 0, \quad x_C^3 = \frac{1}{4}h,$$

$$I_C^1 = \frac{1}{80} M(4b^2 + 3h^2), \quad I_C^2 = \frac{1}{80} M(4a^2 + 3h^2),$$

$$I_C^3 = \frac{1}{20} M(a^2 + b^2).$$

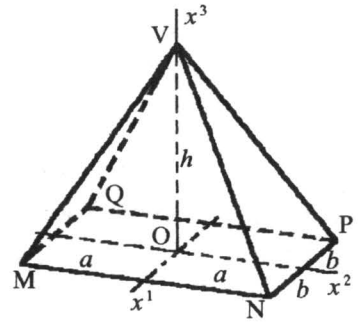


Figura 2.9.3

4) Con circular de rază r și înălțime h

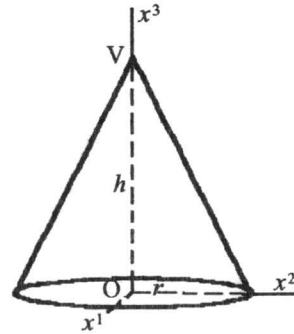
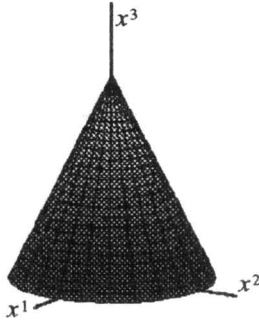


Figura 2.9.4

$$\begin{cases} x^1 = u \cos \theta \\ x^2 = u \sin \theta \\ x^3 = z \end{cases} ; \quad \frac{u}{r} = \frac{h-z}{h}; \quad \theta \in [0, 2\pi], z \in [0, h];$$

$$M = \rho_o \iiint_D dx^1 dx^2 dx^3 = \rho_o \iiint_{\Delta} u du d\theta dz = \pi \rho_o \int_0^h \left(\frac{r}{h} (h-z) \right)^2 dz = \frac{1}{3} \pi \rho_o r^2 h$$

$$x_C^1 = x_C^2 = 0, \quad x_C^3 = \pi \rho_o \int_0^h \left(\frac{r}{h} (h-z) \right)^2 z dz = \frac{1}{4} h,$$

$$I_O^1 = I_O^2 = \rho_o \int_0^h \left[\left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \frac{1}{4} \left(\frac{r}{h} (h-z) \right)^4 + \pi \left(\frac{r}{h} (h-z) \right)^2 z^2 \right] dz = \dots = \frac{1}{20} M(3r^2 + h^2),$$

$$I_O^3 = 2\pi \rho_o \int_0^h \frac{1}{4} \left(\frac{r}{h} (h-z) \right)^4 dz = \dots = \frac{3}{10} M r^2.$$

5) Sfera de rază r

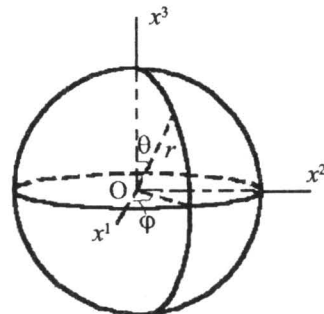
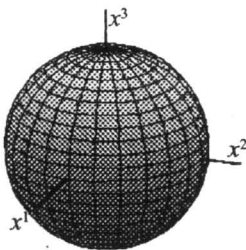


Figura 2.9.5

$$\begin{cases} x^1 = u \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = u \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = u \cos \theta \end{cases}, (u, \theta, \varphi) \in [0, r] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

$$M = \rho_o \left(\int_0^r u^2 du \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \dots = \frac{4}{3} \pi \rho_o r^3, \mathbf{x}_C = \mathbf{o},$$

$$I = \rho_o \left(\int_0^r u^4 du \right) \left(\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) = \dots = \frac{2}{5} M r^2 \Rightarrow \mathbf{I}_O = \frac{2}{5} M r^2 \mathbf{1}.$$

6) Coroana sferică de raze r, R : se aplică rezultatele de la sferă și aditivitatea în raport cu măsura *masă*

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_o (R^3 - r^3), \mathbf{x}_C = \mathbf{o},$$

$$\mathbf{I}_O = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} \mathbf{1}.$$

7) Sector sferic de rază r și înălțime h : se calculează analog ca la sferă înlocuind limitele de integrare în raport cu θ prin 0 și α , $\cos \alpha = \frac{r-h}{r}$

$$M = \frac{2}{3} \pi \rho_o r^2 h, x_C^1 = x_C^2 = 0, x_C^3 = \frac{3}{8} (2r - h),$$

$$I_O^1 = I_O^2 = \frac{1}{10} M (6r^2 - 3rh + h^2), I_O^3 = \frac{1}{5} M h (3r - h).$$

2.10. Un solid omogen de masă M este constituit dintr-un cilindru circular drept de înălțime h și rază r , continuat cu două semisfere de raze r , având baze comune cu cilindrul. Să se determine momentul de inerție în raport cu dreapta trecând prin centrul de masă O și intersectând circumferințele bazelor cilindrului.

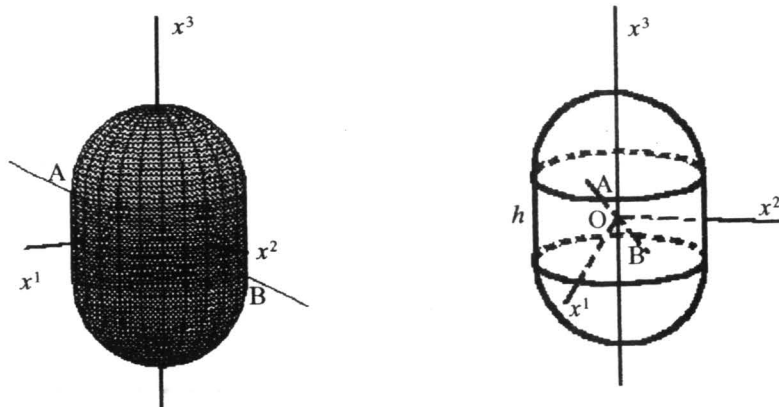


Figura 2.10

Fie reperul solidar legat de solid având drept ax Ox^3 axa de simetrie a corpului și axe Ox^1 și Ox^2 perpendiculare pe axa de simetrie, acestea fiind și axele principale de inerție prin O . Momentele principale de inerție sunt

$$I_O^1 = I_O^2 = \pi \rho_o r^4 \left(\frac{1}{4}h + \frac{2}{5}r \right), I_O^3 = \pi \rho_o r^4 \left(\frac{1}{2}h + \frac{4}{5}r \right).$$

Cosinușii directori ai dreptei considerate AB sunt

$$\frac{2r}{\sqrt{4r^2 + h^2}}, 0, \frac{-h}{\sqrt{4r^2 + h^2}},$$

deci momentul de inerție cerut va fi

$$\begin{aligned} I_{AB} &= I_O^1 \frac{4r^2}{4r^2 + h^2} + I_O^3 \frac{h^2}{4r^2 + h^2} = \\ &= \pi \rho_o r^4 \frac{4r^2 \left(\frac{1}{4}h + \frac{2}{5}r \right) + h^2 \left(\frac{1}{2}h + \frac{4}{5}r \right)}{4r^2 + h^2} = \frac{1}{10} \pi \rho_o r^4 (8r + 5h) \frac{2r^2 + h^2}{4r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

2.11. Să se găsească momentele principale de inerție și direcțiile principale ale unui cub în raport cu unul dintre vârfuri.

Tensorul de inerție în raport cu centrul cubului C, conform problemei 2.9 punctul 1), pentru $a = b = c$

$$I_C^1 = I_C^2 = I_C^3 = \frac{1}{6}Ma^2$$

unde, în raport cu vârful O, cu axe orientate după direcțiile muchiilor,

$$I_O^{11} = I_O^{22} = I_O^{33} = \frac{2}{3}Ma^2, I_O^{12} = I_O^{23} = I_O^{31} = -\frac{1}{4}Ma^2,$$

Valorile principale ale tensorului de inerție în raport cu vârful O sunt rădăcinile ecuației caracteristice

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 - I_O & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 - I_O & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 - I_O \end{bmatrix} = 0$$

adică

$$I_O^1 = I_O^2 = \frac{11}{12}Ma^2, I_O^3 = \frac{1}{6}Ma^2.$$

Direcția principală corespunzătoare valorii proprii I_O^3 se obține rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 - I_O^3 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 - I_O^3 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 - I_O^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{bmatrix} = 0 \\ (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2n^1 - n^2 - n^3 = 0 \\ -n^1 + 2n^2 - n^3 = 0 \\ -n^1 - n^2 + 2n^3 = 0 \\ (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n^1 - n^2 - n^3 = 0 \\ -n^1 + 2n^2 - n^3 = 0 \\ (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \end{cases}$$

Se poate alege

$$\mathbf{n}_3 : n^1 = n^2 = n^3 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Direcțiile principale corespunzătoare valorilor proprii $I_O^1 = I_O^2$ se obțin rezolvând sistemul găsit în mod similar cu cel de mai sus

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}Ma^2 - I_O^1 & -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 - I_O^1 & -\frac{1}{4}Ma^2 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{2}{3}Ma^2 - I_O^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n^1 \\ n^2 \\ n^3 \end{bmatrix} = 0 \\ (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \end{array} \right.$$

sau

$$\begin{cases} n^1 + n^2 + n^3 = 0 \\ (n^1)^2 + (n^2)^2 + (n^3)^2 = 1 \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt direcții ortogonale direcției obținută pentru valoarea proprie simplă I_O^3 . Una din aceste direcții se poate alege în planul Ox^1x^2 adică

$$\mathbf{n}_1 : \quad n^1 = -n^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Atunci

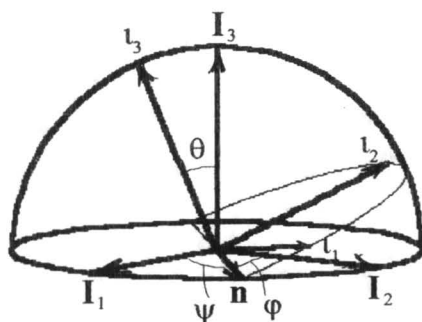
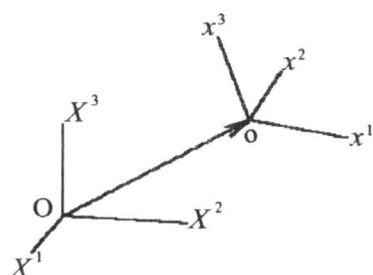
$$n_2 = \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1, \text{ deci } \mathbf{n}_2 : \quad n^1 = n^2 = \frac{\sqrt{6}}{6}, n^3 = -\frac{2\sqrt{6}}{6}.$$

CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

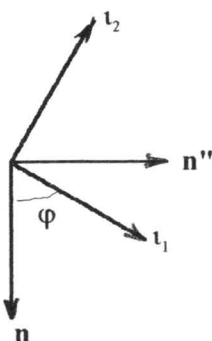
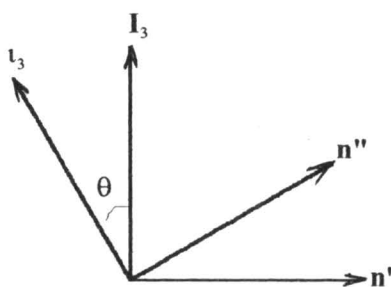
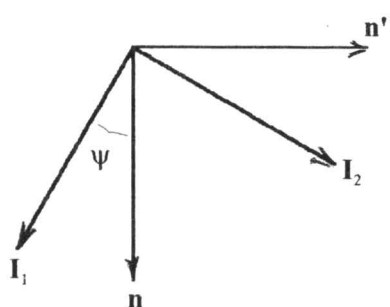
Fie $OX^1 X^2 X^3$ un reper fix (inertial) și $ox^1 x^2 x^3$ un reper mobil, solidar cu solidul rigid. Condiția de rigiditate implică numărul de grade de libertate pentru solidul rigid liber: șase grade de libertate dacă solidul rigid nu este bară rectilinie zveltă și cinci grade de libertate pentru bara rectilinie zveltă. Poziția solidului rigid în raport cu reperul fix poate fi determinată prin poziția originii reperului solidar cu rigidul X_0 și prin orientarea axelor reperului mobil față de cele ale reperului fix, dată de unghiurile lui Euler ψ, θ, φ .

Mișcarea unui punct oarecare al solidului rigid va fi caracterizată prin relațiile

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x} \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \end{cases},$$



$$\{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\} \xrightarrow{\psi} \{\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{I}_3\} \xrightarrow{\theta} \{\mathbf{n}, \mathbf{n}'', \mathbf{l}_3\} \xrightarrow{\varphi} \{\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3\},$$



$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 = \cos \psi \mathbf{n} - \sin \psi \mathbf{n}' \\ \mathbf{I}_2 = \sin \psi \mathbf{n} + \cos \psi \mathbf{n}' \\ \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_3 \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{n} = \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = \cos \theta \mathbf{n}'' - \sin \theta \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{I}_3 = \sin \theta \mathbf{n}'' + \cos \theta \mathbf{l}_3 \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{l}_1 - \sin \varphi \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{n}'' = \sin \varphi \mathbf{l}_1 + \cos \varphi \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \mathbf{n} = \cos \psi \mathbf{I}_1 + \sin \psi \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{n}' = -\sin \psi \mathbf{I}_1 + \cos \psi \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_3 \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{n} = \mathbf{n} \\ \mathbf{n}'' = \cos \theta \mathbf{n}' + \sin \theta \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{l}_3 = -\sin \theta \mathbf{n}' + \cos \theta \mathbf{I}_3 \end{cases}; \begin{cases} \mathbf{l}_1 = \cos \varphi \mathbf{n} + \sin \varphi \mathbf{n}'' \\ \mathbf{l}_2 = -\sin \varphi \mathbf{n} + \cos \varphi \mathbf{n}'' \\ \mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_3 \end{cases},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{I}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\varphi} \mathbf{l}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega^j \mathbf{l}_j = \Omega^k \mathbf{I}_k,$$

$$\begin{cases} \omega^1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega^2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega^3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \Omega^1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega^2 = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega^3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} .$$

Condiția de compatibilitate a vitezelor cu deplasările:

$$(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0 .$$

Cazuri particulare de mișcare:

- mișcare de translație, dată de $\mathbf{V}_o(t)$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_o(t), \quad \omega(t) \equiv \mathbf{0};$$

- mișcare de rotație, dată de $\omega(t)$

$$\mathbf{V}(t) = \omega(t) \times \mathbf{x} = \omega(t) \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_o);$$

- mișcare de roto-translație (elicoidală): translație dată de $\mathbf{V}_o$, rotație dată de ω , axa instantanee de rotație și alunecare

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\omega^2} \omega \times \mathbf{V}_o + \lambda \omega;$$

axa instantanee de rotație descrie axoida fixă în raport cu reperul fix și axoida mobilă în raport cu reperul solidar cu rigidul, tangente în fiecare moment în lungul axei instantanee de rotație.

În cazul mișcării plan-paralele (plan $OX^1X^2 \equiv ox^1x^2$), viteza $\mathbf{V}_o$ se află în acest plan și $\omega = \omega(t)\mathbf{t}_3$; intersecțiile axoidelor cu planul sunt curbele

- baza în raport cu reperul fix

$$\begin{cases} \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{I}_1 - \omega(X^2 - X_o^2) = 0 \\ \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{I}_2 + \omega(X^1 - X_o^1) = 0 \end{cases} ,$$

- rostogolitoarea în raport cu reperul solidar cu rigidul

$$\begin{cases} \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{t}_1 - \omega x^2 = 0 \\ \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{t}_2 + \omega x^1 = 0 \end{cases} ,$$

tangente în punctul de contact.

3.1. Două glisiere paralele se deplasează cu viteze constante $\mathbf{V}_1$ și $\mathbf{V}_2$. Între glisiere se găsește un disc de rază R , centru C , care se rostogolește fără alunecare. Să se determine baza și rostogolitoarea discului.

Mișcarea plană a discului trebuie studiată în funcție de vitezele glisierelor.

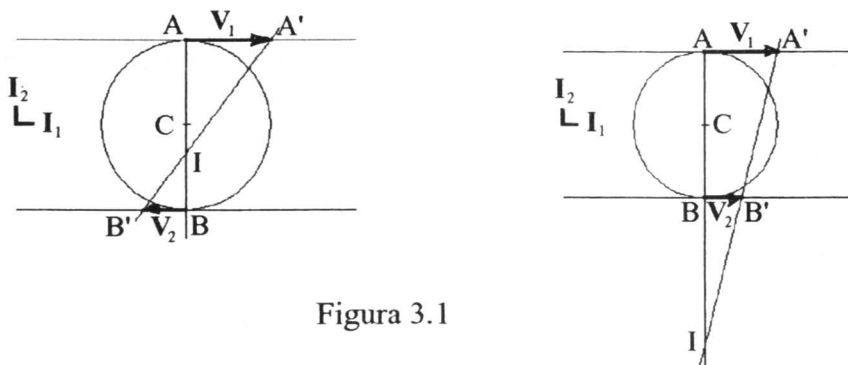


Figura 3.1

Dacă vitezele au mărimi diferite, centrul instantaneu de rotație se găsește la inteseția normalei comune pe cele două viteze cu dreapta care unește "extremitățile" lor. Din asemănarea triunghiurilor IAA' și IBB', rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= V_1 \mathbf{I}_1, \mathbf{V}_2 = V_2 \mathbf{I}_1, \\ I A &= \frac{2 R V_1}{V_1 - V_2}, I B = \frac{2 R V_2}{V_1 - V_2} \end{aligned}$$

(V_1, V_2 - mărimi algebrice). Aceste distanțe fiind cunoscute, baza este o dreaptă paralelă cu glisierile

$$\mathbf{X} = R \frac{V_1 + V_2}{V_1 - V_2} \mathbf{I}_1.$$

Cum distanța IC este constantă, rostogolitoarea este cercul de rază IC.

Viteza unghiulară de rotație în jurul centrului instantaneu $\omega = \omega \mathbf{I}_3$ rezultă din $I A = V_1$, adică

$$\omega = \frac{V_1 - V_2}{2 R},$$

iar viteza centrului cercului va fi

$$\mathbf{V}_C = \omega \mathbf{I}_3 \times \overrightarrow{I C} = \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \mathbf{I}_1.$$

Dacă $V_1 = V_2$, discul are o mișcare de translație cu viteza $V_1 = V_2$; nu există centru instantaneu de rotație. Dacă $V_1 = -V_2$, discul se rotește în jurul centrului său cu

$$\omega = \frac{V_1}{R},$$

centrul instantaneu de rotație este fix.

3.2. Problema lui Cardan. O bară AB de lungime l se mișcă astfel încât extremitățile sale rămân pe două drepte fixe, care formează între ele un unghi β . Să se determine baza și rostogolitoarea.

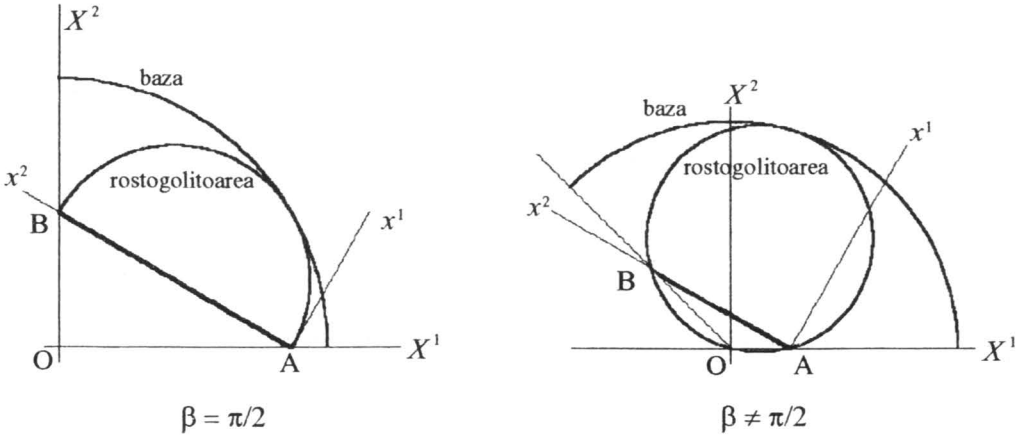


Figura 3.2

Cazul $\beta = \frac{\pi}{2}$. Cele două drepte fixe sunt axele reperului fix, A este originea reperului solidar cu bara, în lungul acesteia fiind $\mathbf{i}_2$. Inclinarea barei față de OA fiind θ , poziția extremităților barei este caracterizată prin

$$\mathbf{X}_A = l \sin \theta \mathbf{I}_1, \mathbf{X}_B = l \cos \theta \mathbf{I}_2,$$

iar caracteristicile mișcării sunt

$$\mathbf{V}_A = l\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{I}_1, \omega = \dot{\theta} \mathbf{I}_3.$$

Ecuatiile parametrice ale bazei

$$\dot{\theta}(l \cos \theta - X^2) = 0, \dot{\theta}(X^1 - l \sin \theta) = 0$$

sau

$$X^1 = l \sin \theta, X^2 = l \cos \theta$$

adică baza este cercul cu centrul O și raza l . Acest lucru era previzibil prin construcția geometrică, triunghiul OAI dreptunghic, cu o catetă $l \sin \theta$, deci cu ipotenuza l .

Ecuatiile parametrice ale rostogolitoarei sunt

$$\dot{\theta}(l \cos^2 \theta - x^2) = 0, \dot{\theta}(x^1 - l \sin \theta \cos \theta) = 0$$

sau

$$x^1 = \frac{1}{2} l \sin 2\theta, x^2 = \frac{1}{2} l (1 + \cos 2\theta)$$

deci rostogolitoarea este un cerc cu centrul în mijlocul barei și raza $l/2$, fapt previzibil geometric, unghiul AIB fiind drept și $AB = l$.

Cazul $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. Reperul fix are originea în punctul de intersecție al dreptelor fixe, direcția $\mathbf{I}_1$ după direcția uneia dintre drepte. Ecuația celeilalte drepte va fi

$$X^2 = X^1 \tan \beta.$$

Reperul solidar cu bara are originea în A și direcția $\mathbf{I}_2$ în lungul barei. Fie θ unghiul lui $\mathbf{I}_1$ cu $\mathbf{I}_1$. Atunci

$$\mathbf{X}_A = d_A \mathbf{I}_1, \mathbf{X}_B = d_B (\mathbf{I}_1 + \tan \beta \mathbf{I}_2),$$

$$\omega = \dot{\theta} \mathbf{I}_3, \mathbf{V}_A = \dot{d}_A \mathbf{I}_1.$$

Ecuatiile parametrice ale bazei sunt

$$\dot{d}_A - \dot{\theta} X^2 = 0, X^1 = d_A,$$

sau

$$X^1 = d_A, X^2 = \frac{\dot{d}_A}{\dot{\theta}},$$

dar

$$d_A = l \frac{\cos(\beta - \theta)}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{\dot{d}_A}{\dot{\theta}} = l \frac{\sin(\beta - \theta)}{\sin \beta},$$

deci baza este cercul cu centrul în punctul de intersecție al dreptelor, având raza $l / \sin \beta$

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 = \frac{l^2}{\sin^2 \beta}.$$

Ecuatiile parametrice ale rostogolitoarei sunt

$$x^1 = \frac{\dot{d}_A}{\dot{\theta}} \sin \theta, x^2 = \frac{\dot{d}_A}{\dot{\theta}} \cos \theta,$$

de unde

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= \frac{2}{l} \sin \beta (x_1 \sin \beta - x_2 \cos \beta) + \sin 2\beta \\ \cos 2\theta &= \frac{2}{l} \sin \beta (x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta) + \cos 2\beta \end{aligned}$$

deci rostogolitoarea este un cerc trecând prin punctul de intersecție al dreptelor și având diametrul $l / \sin \beta$

$$\left(x^1 + \frac{l}{2} \operatorname{ctg} \beta\right)^2 + \left(x^2 - \frac{l}{2}\right)^2 = \left(\frac{l}{2 \sin \beta}\right)^2.$$

3.3. Un disc de rază R se rostogolește uniform pe plan orizontal, centrul său deplasându-se cu viteza V^o . Discul rămâne mereu în același plan vertical. Să se determine baza și rostogolitoarea.

Reperul fix este determinat de intersecția planului orizontal cu planul vertical al discului, având direcția $\mathbf{I}_1$, direcția $\mathbf{I}_2$ verticală în planul vertical considerat. Reperul solidar cu discul are originea în centrul acestuia C , direcția $\mathbf{i}_1$ face unghiul θ cu $\mathbf{I}_1$. Mișcarea discului este caracterizată prin

$$\mathbf{X}_C = X \mathbf{I}_1, \quad \mathbf{V}_C = V^o \mathbf{I}_1, \quad \omega = \omega \mathbf{I}_3.$$

Ecuatiile parametrice ale bazei sunt

$$X^1 = X, \quad X^2 = R + \frac{V^o}{\omega},$$

deci baza este o dreaptă orizontală.

Ecuatiile parametrice ale rostogolitoarei sunt

$$x^1 = -\frac{V^o}{\omega} \sin \theta, \quad x^2 = \frac{V^o}{\omega} \cos \theta,$$

deci rostogolitoarea este un cerc cu centrul în C de rază V^o/ω .

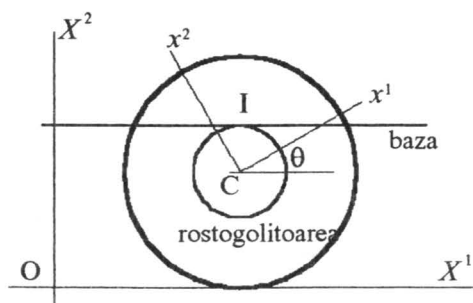


Figura 3.3

3.4. Pe un disc, tangent în origine axei fixe OX^1 , se sprijină continuu o bară AB a cărei extremitate A se deplasează pe OX^1 . Să se determine baza și rostogolitoarea.

Reperul fix în plan este determinat de OX^1 și perpendiculara în O pe ea. Reperul solidar cu bara are originea în A și AB constituie direcția $\mathbf{i}_2$. Mișcarea este caracterizată prin

$$\mathbf{X}_A = X \mathbf{I}_1, \quad \mathbf{V}_A = \dot{X} \mathbf{I}_1, \quad \omega = \dot{\theta} \mathbf{I}_3,$$

$$X = R \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi - \theta}{2},$$

$$\dot{X} = R \frac{\dot{\theta}}{2 \sin^2 \alpha}.$$

Ecuatiile parametrice ale bazei se determină din

$$\begin{cases} X^1 = R \operatorname{ctg} \alpha = R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = R \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ X^2 = \frac{\dot{X}}{\dot{\theta}} = \frac{R}{2 \sin^2 \alpha} = \frac{R}{1 + \cos \theta} \end{cases},$$

de unde prin eliminarea lui θ se obține parabola cu focarul în C și directoare $X^2 = 0$

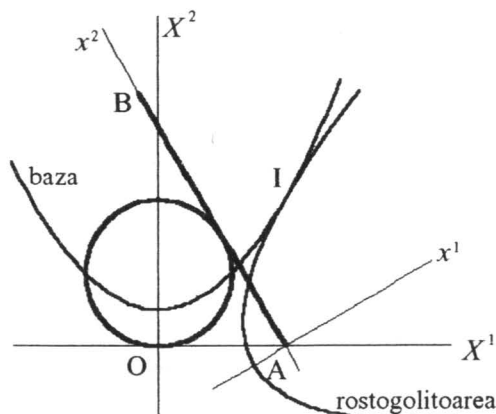


Figura 3.4

$$X^2 - \frac{R}{2} = \frac{(X^1)^2}{2R}.$$

Ecuatiile parametrice ale rostogolitoarei se determină din

$$\begin{cases} x^1 = -\frac{\dot{X}}{\dot{\theta}} \sin \theta = R \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} \\ x^2 = \frac{\dot{X}}{\dot{\theta}} \cos \theta = R \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \end{cases},$$

de unde prin eliminarea lui θ se obține parabola având focarul în A și ca directoare $x^1 = -R/2$

$$(x^2)^2 = R^2 + 2Rx^1.$$

Geometric rezultatul se obține observând că CA este bisectoarea unghiului OCB, triunghiul ICA isoscel, deci I egal depărtat de C și A.

3.5. Capătul A al unei bare AB se mișcă pe curba plană (C_1) cu viteza V_1 , iar capătul B pe o curbă (C_2) în același plan. Să se determine viteza unui punct M al barei ca mărime și direcție.

Fie în plan un reper fix $OX^1 X^2$ și în raport cu acesta ecuațiile curbelor

$$\begin{cases} (C_1) & f_1(X^1, X^2) = 0 \\ (C_2) & f_2(X, X^2) = 0 \end{cases}.$$

Ecuatiile normalelor la curbe în A, respectiv B, sunt

$$\begin{aligned} X^2 - X_A^2 &= m_1 (X^1 - X_A^1) \quad \text{unde} \quad m_1 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial X^2} / \frac{\partial f_1}{\partial X^1} \right)_A, \\ X^2 - X_B^2 &= m_2 (X^1 - X_B^1) \quad \text{unde} \quad m_2 = \left(\frac{\partial f_2}{\partial X^2} / \frac{\partial f_2}{\partial X^1} \right)_B, \end{aligned}$$

Coordonatele centrului instantaneu

$$\begin{cases} X_I^1 = \frac{1}{m_2 - m_1} [X_A^2 - X_B^2 - m_1 X_A^1 + m_2 X_B^1] \\ X_I^2 = \frac{1}{m_2 - m_1} [m_2 X_A^2 - m_1 X_B^2 + m_1 m_2 (X_B^1 - X_A^1)] \end{cases},$$

X_A, Y_A, X_B, Y_B satisfac condiția $AB = l$

$$(X_A^1 - X_B^1)^2 + (X_A^2 - X_B^2)^2 = l^2.$$

Viteza unghiulară va fi

$$\omega = \frac{V_1}{IA}.$$

Viteza punctului M, perpendiculară pe IM

$$|V_M| = \left| \omega \times \overrightarrow{IM} \right| = V_1 \sqrt{\frac{(X^1 - X_M^1)^2 + (X^2 - X_M^2)^2}{(X^1 - X_A^1)^2 + (X^2 - X_A^2)^2}}.$$

3.6. O bară rectilinie OA trece printr-un punct fix O, iar extremitatea A descrie curba $r = f(\theta)$. Să se determine baza și rostogolitoarea mișcării barei.

Cazuri particulare:

- a) $r = \frac{a}{\cos \theta}$ (dreaptă);
 b) $r = a\theta$ (spirala lui Archimede).

Un punct de pe curbă are coordonatele

$$X^1 = f(\theta)\cos \theta, X^2 = f(\theta)\sin \theta.$$

Panta normalei într-un punct la curbă se calculează cu

$$\frac{dX^1}{dX^2} = \frac{-f'(\theta)\cos \theta + f(\theta)\sin \theta}{f'(\theta)\sin \theta + f(\theta)\cos \theta}.$$

Centrul instantaneu I se găsește la intersecția normalei din A cu perpendiculara la bară în O

$$\begin{cases} X^2 - f(\theta)\sin \theta = \frac{-f'(\theta)\cos \theta + f(\theta)\sin \theta}{f'(\theta)\sin \theta + f(\theta)\cos \theta}(X^1 - f(\theta)\cos \theta) \\ X^2 = -X^1 \operatorname{ctg} \theta \end{cases}$$

adică

$$X_I^1 = -f'(\theta)\sin \theta, X_I^2 = f'(\theta)\cos \theta,$$

care constituie ecuațiile parametrice ale bazei. Față de reperul solidar cu bară, cu originea în A, coordonatele centrului instantaneu sunt

$$x_I^1 = -f(\theta), x_I^2 = f'(\theta),$$

acestea fiind ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei.

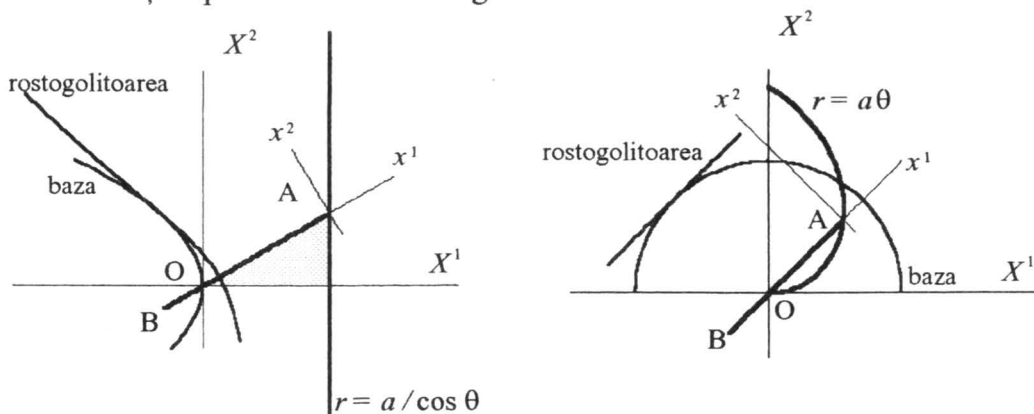


Figura 3.6

a) $f'(\theta) = a \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}$

$$X_I^1 = -a \operatorname{tg}^2 \theta, X_I^2 = a \operatorname{tg} \theta,$$

$$x_I^1 = -\frac{a}{\cos \theta}, x_I^2 = a \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}.$$

Deci baza este parabola

$$(X^2)^2 = aX^1,$$

iar rostogolitoarea este curba

$$ax^2 = x^1 \sqrt{(x^1)^2 - a^2}.$$

b)

$$f'(\theta) = a$$

$$X_1^1 = -a \sin \theta, \quad X_1^2 = a \cos \theta,$$

$$x_1^1 = -a\theta, \quad x_1^2 = a.$$

Deci baza este cercul

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 = a^2,$$

iar rostogolitoarea dreapta

$$x^2 = a.$$

3.7. Să se determine viteza unghiulară a triedrului lui Frenet.

Fie triedrul lui Frenet $\{\tau, \mathbf{v}, \beta\}$ asociat unei curbe pe care un punct material se mișcă cu viteza

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{s}},$$

τ în sensul mișcării. Fie

$$\omega = \omega_\tau \tau + \omega_v \mathbf{v} + \omega_\beta \beta$$

Conform formulelor lui Poisson

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = \omega \times \tau = \omega_\beta \mathbf{v} - \omega_v \beta \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega \times \mathbf{v} = \omega_\tau \beta - \omega_\beta \tau, \\ \frac{d\beta}{dt} = \omega \times \beta = \omega_v \tau - \omega_\tau \mathbf{v} \end{cases}$$

iar conform formulelor lui Frenet

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R} \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{ds} = -\frac{1}{T} \beta - \frac{1}{R} \tau \\ \frac{d\beta}{ds} = \frac{1}{T} \mathbf{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = \frac{v}{R} \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{v}{T} \beta - \frac{v}{R} \tau, \\ \frac{d\beta}{dt} = \frac{v}{T} \mathbf{v} \end{cases}$$

R - raza de curbură, T - raza de torsione, deci

$$\omega_\tau = -\frac{v}{T}, \quad \omega_v = 0, \quad \omega_\beta = \frac{v}{R}.$$

Ecuatiile axei instantanee de rotație și alunecare sunt

$$\frac{x^1}{R} + \frac{x^3}{T} = 0, \quad x^2 = \frac{T}{\frac{T}{R} + \frac{R}{T}}$$

(viteza originii triedrului lui Frenet este $\mathbf{V}_0 = v\tau$).

DINAMICA SOLIDULUI RIGID

Fie un solid rigid, $OX^1 X^2 X^3$ un reper inerțial și $ox^1 x^2 x^3$ un reper solidar legat cu rigidul. Poziția solidului rigid liber este precizată prin șase parametri: trei coordonate ale punctului "o" sau ale vectorului de poziție $\mathbf{X}_o$ și cele trei unghiuri ale lui Euler φ, ψ, θ care dau poziția relativă a axelor reperului solidar cu rigidul în raport cu reperul inerțial. Solicitarea solidului rigid este caracterizată de rezultanta forțelor date $\mathbf{F}$ și de momentul resultant al acestor forțe în raport cu punctul "o".

Teorema de mișcare a centrului de masă. Centrul de masă al unui solid rigid se mișcă ca și cum în el ar fi concentrată masa totală a solidului rigid și asupra lui ar acționa rezultanta forțelor

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = \mathbf{F}.$$

Teorema asupra momentului cinetic în mișcarea în jurul punctului A. Solidul rigid se mișcă în jurul punctului A astfel încât, la fiecare moment, derivata momentului cinetic în raport cu punctul A este egală cu momentul resultant în raport cu punctul A al forțelor care acționează asupra sistemului la care se adaugă momentul suplimentar $M\mathbf{x}_C \times \mathbf{A}_A$

$$\frac{d\mathbf{K}_A}{dt} = \mathbf{M}_A - M\mathbf{x}_C \times \mathbf{A}_A, \quad \mathbf{K}_A = \mathbf{I}_A\omega, \quad \mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O - \mathbf{X}_A \times \mathbf{F}.$$

Consecință. Teorema asupra momentului cinetic în raport cu centrul de masă C se scrie la fel ca principiul de bilanț al momentului cinetic în raport cu O

$$\frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_C.$$

Definiție. Energia cinetică totală a solidului rigid este

$$T = \frac{1}{2} \int_{D(t)} \mathbf{V}^2 dm.$$

Puterea mecanică totală este

$$P = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{V}_j + \int_{D(t)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dm + \mathbf{M}'_O \cdot \omega.$$

Propoziție. În mișcarea solidului rigid, la fiecare moment, derivata în raport cu timpul a energiei cinetice totale este egală cu puterea mecanică totală

$$\frac{dT}{dt} = P$$

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{V}_A^2 + (\mathbf{V}_A, \omega, M\mathbf{x}_C) + \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{I}_A\omega; \quad P = \mathbf{V}_A \cdot \mathbf{F} + \omega \cdot \mathbf{M}_A.$$

Definiție. Se numește *legătură geometrică sau finită* o restricție în mișcarea solidului rigid de forma

$$f(\mathbf{X}_o, \psi, \theta, \varphi, t) = 0.$$

Se numește *legătură cinematică* o restricție în mișcarea solidului rigid de forma

$$g(\mathbf{X}_o, \mathbf{V}_o, \psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) = 0.$$

Postulatul lui Cauchy - axioma eliberării de legături: există forțe de legătură (reacțiuni) (apriori necunoscute), care împiedică solidul rigid să aibă mișcări incompatibile cu legăturile. Reacțiunile pot fi caracterizate prin rezultanta $\mathbf{F}^R$ și momentul resultant în raport cu punctul "o", $\mathbf{M}_o^R$.

Definiție. Se numesc *legături ideale* acele legături pentru care puterea mecanică virtuală a forțelor de legătură, pentru orice viteză virtuală $(\mathbf{V}_o, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ a solidului rigid, compatibilă cu legăturile, este nulă

$$\mathbf{F}^R \cdot \mathbf{V}_o + \mathbf{M}_o^R \cdot (\mathbf{I}_3 \dot{\psi} + \mathbf{n} \dot{\theta} + \mathbf{t}_3 \dot{\varphi}) = 0.$$

Reacțiunile de contact al unui solid rigid cu altul, când cel puțin unul dintre cele două corpuri admite plan tangent în punctul de contact, se descompun după direcția normală la planul tangent și o direcție din acest plan

$$\mathbf{F}^R = \mathbf{N} + \Phi, \quad \mathbf{M}_o^R = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_p.$$

Legile frecării uscate, deduse pe cale experimentală:

– dacă corpurile în contact sunt în echilibru, atunci

$$\|\Phi_A\| \leq f \|\mathbf{N}_A\|, \quad \|\mathbf{M}_r\| \leq \delta_r \|\mathbf{N}_A\|, \quad \|\mathbf{M}_p\| \leq \delta_p \|\mathbf{N}_A\|,$$

unde f , δ_r , δ_p sunt coeficienții de frecare de aderență, de rostogolire, respectiv de pivotare; acești coeficienți depind numai de natura corpurilor în contact;

– dacă solidul rigid considerat alunecă, se rostogolește și pivotează pe celălalt corp, atunci

$$\Phi_A = -f \|\mathbf{N}_A\| \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|},$$

$$\mathbf{M}_r = -\delta_r \|\mathbf{N}_A\| \frac{\boldsymbol{\omega}_r}{\|\boldsymbol{\omega}_r\|}, \quad \mathbf{M}_p = -\delta_p \|\mathbf{N}_A\| \frac{\boldsymbol{\omega}_p}{\|\boldsymbol{\omega}_p\|}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_p;$$

– dacă există alunecare, rostogolire fără pivotare, atunci

$$\Phi_A = -f \|\mathbf{N}_A\| \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|}, \quad \mathbf{M}_r = -\delta_r \|\mathbf{N}_A\| \frac{\boldsymbol{\omega}_r}{\|\boldsymbol{\omega}_r\|}, \quad \|\mathbf{M}_p\| \leq \delta_p \|\mathbf{N}_A\|;$$

– dacă există alunecare, pivotare fără rostogolire, atunci

$$\Phi_A = -f \|\mathbf{N}_A\| \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|}, \quad \mathbf{M}_p = -\delta_p \|\mathbf{N}_A\| \frac{\boldsymbol{\omega}_p}{\|\boldsymbol{\omega}_p\|}, \quad \|\mathbf{M}_r\| \leq \delta_r \|\mathbf{N}_A\|;$$

– dacă există alunecare, fără rostogolire și fără pivotare

$$\Phi_A = -f \|\mathbf{N}_A\| \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|}, \quad \|\mathbf{M}_r\| \leq \delta_r \|\mathbf{N}_A\|, \quad \|\mathbf{M}_p\| \leq \delta_p \|\mathbf{N}_A\|;$$

– dacă există rostogolire și pivotare fără alunecare, atunci

$$\|\Phi_A\| \leq f \|\mathbf{N}_A\|, \quad \mathbf{M}_r = -\delta_r \|\mathbf{N}_A\| \frac{\boldsymbol{\omega}_r}{\|\boldsymbol{\omega}_r\|}, \quad \mathbf{M}_p = -\delta_p \|\mathbf{N}_A\| \frac{\boldsymbol{\omega}_p}{\|\boldsymbol{\omega}_p\|}.$$

§4.1. Preliminarii

4.1.1. Un sistem rigid în repaus este în echilibru.

Un sistem rigid este în *repaus* dacă își pstrează poziția (viteze și accelerații nule). Un sistem rigid este în *echilibru* dacă forțele care acționează asupra lui sunt în echilibru (formează un sistem echivalent cu zero).

Utilizând teoremele enunțate anterior, mișcarea se poate caracteriza prin

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = \mathbf{R}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_C.$$

Dacă sistemul rigid este în repaus, atunci $\mathbf{V}_C = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, și din relațiile de mai sus rezultă

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_C = \mathbf{0},$$

adică sistemul de forțe formează un sistem echivalent cu zero.

4.1.2. Dacă sistemul de forțe care acționează asupra unui sistem material rigid este în echilibru și la un moment t_0 el are viteza punctului C și viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ nule, atunci el rămâne în continuare în repaus.

Mișcarea poate fi caracterizată de relațiile

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}.$$

Rezultă

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_C^0 = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{0} \xrightarrow{\text{pb.2.2}} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^0 = \mathbf{0}$$

(tensorul de inerție este degenerat numai în cazul unui sistem rectiliniu; în acest caz, componentele vitezei unghiulare pierd o componentă și concluzia este aceeași).

În consecință, sistemul rigid este în repaus: centrul de masă nu se deplasează, iar direcțiile solidare cu rigidul nu se rotesc în raport cu reperul inerțial

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X}_C \equiv \mathbf{X}_C^0,$$

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} \equiv 0 \\ \dot{\theta} \equiv 0 \\ \dot{\varphi} \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi \equiv \psi^0 \\ \theta \equiv \theta^0 \\ \varphi \equiv \varphi^0 \end{cases}.$$

4.1.3. Să se scrie ecuațiile de mișcare ale unui solid rigid când unul dintre punctele lui are o mișcare dată.

Fie A punctul solidar cu solidul rigid obligat să aibă mișcare dată

$$\mathbf{X}_A = \mathbf{X}_A(t).$$

Punctul A este ales drept origine a reperului solidar cu solidul rigid.

Conform axiomei eliberării de legături se introduce în A forța de legătură $\mathbf{R}$. Ecuațiile de mișcare date de teoremele de mișcare a centrului de masă și asupra momentului cinetic în raport cu punctul A vor fi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[M(\dot{\mathbf{X}}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_C) \right] = \mathbf{F} + \mathbf{R} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_A - M \mathbf{x}_C \times \ddot{\mathbf{X}}_A \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} M[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_C)] = \mathbf{F} + \mathbf{R} - M \ddot{\mathbf{X}}_A \\ \mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_A - M \mathbf{x}_C \times \ddot{\mathbf{X}}_A \end{cases}$$

Necunoscutele celor 6 ecuații scalare de mai sus sunt cele 3 componente ale vitezei unghiulare $\boldsymbol{\omega}$ și cele 3 componente ale forței de legătură $\mathbf{R}$. Ultima ecuație vectorială conține numai necunoscuta $\boldsymbol{\omega}$; odată determinată aceasta, din prima ecuație vectorială se determină forța de legătură $\mathbf{R}$.

În particular această problemă cuprinde cazul solidului rigid cu punct fix $\mathbf{X}_A = \mathbf{0}$.

Cazul general se poate rezolva ca o problemă de solid rigid cu punct fix adăugând la forțele efective o forță egală cu $-M \ddot{\mathbf{X}}_A$ aplicată în centrul de masă C.

4.1.4. Să se scrie ecuațiile de mișcare ale unui solid rigid când unul din punctele sale este obligat să se afle permanent pe o suprafață netedă, perfect lucie.

Fie A punctul solidar cu solidul rigid obligat să se miște pe suprafața

$$\varphi(X^1, X^2, X^3, t) = 0 \quad (\varphi \in C^1).$$

Acest punct este ales drept origine a reperului solidar cu solidul.

Conform axiomei eliberării de legături se introduce în A forța de legătură normală la suprafață

$$\mathbf{R} = \lambda(X^1, X^2, X^3, t) \text{grad} \varphi(X^1, X^2, X^3, t).$$

Ecuațiile care dau mișcarea, rezultând din teoremele de mișcare a centrului de masă și asupra momentului cinetic în raport cu punctul A și legătura impusă, sunt

$$\begin{cases} M[\ddot{\mathbf{X}}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_C)] = \mathbf{F} + \lambda \text{grad} \varphi \\ M \mathbf{x}_C \times \ddot{\mathbf{X}}_A + \mathbf{I}_A \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_A \\ \varphi(X_A^1, X_A^2, X_A^3, t) = 0 \end{cases}$$

Aceste ecuații sunt echivalente, în general, cu 7 ecuații scalare, cu 7 necunoscute: 3 componente ale vectorului de poziție al punctului A – $\mathbf{X}_A$, 3 componente ale vitezei unghiulare $\boldsymbol{\omega}$ și scalarul λ .

4.1.5. Să se scrie ecuațiile de mișcare ale unui solid rigid când unul din punctele lui este obligat să se miște pe o curbă netedă, perfect lucie.

Fie A punctul obligat să se miște pe curba

$$\begin{cases} \varphi(X^1, X^2, X^3, t) = 0, \\ \psi(X^1, X^2, X^3, t) = 0 \end{cases} \quad (\varphi, \psi \in C^1).$$

Conform axiomei eliberării de legături se introduce în A forța de legătură normală la curbă

$$\mathbf{R} = \lambda(X^1, X^2, X^3, t) \text{grad} \varphi(X^1, X^2, X^3, t) + \mu(X^1, X^2, X^3, t) \text{grad} \psi(X^1, X^2, X^3, t).$$

Ecuatiile care dau mișcarea, rezultând din teoremele de mișcare a centrului de masă și asupra momentului cinetic în raport cu punctul A și legătura impusă, echivalente cu 8 ecuații scalare cu 8 necunoscute: 3 componente ale vectorului de poziția al punctului A – $\mathbf{X}_A$, 3 componente ale vitezei unghiulare ω și scalarii λ și μ , sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} M[\ddot{\mathbf{X}}_A + \dot{\omega} \times \mathbf{x}_C + \omega \times (\omega \times \mathbf{x}_C)] = \mathbf{F} + \lambda \text{grad } \varphi + \mu \text{grad } \psi \\ M\mathbf{x}_C \times \ddot{\mathbf{X}}_A + \mathbf{I}_A \dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}_A \omega = \mathbf{M}_A \\ \varphi(X_A^1, X_A^2, X_A^3, t) = 0 \\ \psi(X_A^1, X_A^2, X_A^3, t) = 0 \end{array} \right.$$

4.1.6. Să se scrie ecuațiile de mișcare ale unui solid rigid când două dintre punctele sale sunt obligate să aibă mișcări date.

Fie A și B cele două puncte a căror mișcare este prescrisă în raport cu reperul inerțial

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_A = \mathbf{X}_A(t) \\ \mathbf{X}_B = \mathbf{X}_B(t) \end{array} \right.$$

Mișcarea oricărui punct P al solidului rigid de pe dreapta AB va fi determinată; într-adevăr punctul P va fi caracterizat de scalarul k_P (v.pb.1.1.4b, partea I)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_P = \frac{1-k_P}{l} \mathbf{X}_A + \frac{k_P}{l} \mathbf{X}_B \\ [\mathbf{X}_A(t) - \mathbf{X}_B(t)]^2 = l^2 = \text{const.} \end{array} \right.$$

În felul acesta se poate considera că mișcarea solidului rigid este identică cu cea impusă prin mișcarea dată a unei drepte (AB) solidare cu rigidul, punctul A al dreptei având mișcare dată.

Legăturile impuse solidului rigid conduc la introducerea a două forțe aplicate în A respectiv B: $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$. Deci ecuațiile de mișcare ale solidului rigid, obținute ca și în problemele precedente, vor fi

$$\left\{ \begin{array}{l} M[\dot{\omega} \times \mathbf{x}_C + \omega \times (\omega \times \mathbf{x}_C)] = \mathbf{F} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B - M\ddot{\mathbf{X}}_A \\ \mathbf{I}_A \dot{\omega} + \omega \times \mathbf{I}_A \omega = \mathbf{M}_A + (\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A) \times \mathbf{R}_B - M\mathbf{x}_C \times \ddot{\mathbf{X}}_A \\ \dot{\mathbf{X}}_B = \dot{\mathbf{X}}_A + \omega \times (\mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A) \end{array} \right.$$

Aceste ecuații sunt echivalente cu 8 ecuații scalare (ultima ecuație vectorială este echivalentă numai cu două ecuații scalare în virtutea condiției de compatibilitate a vitezelor cu deplasările) și conțin 9 necunoscute: 3 componente ale vitezei unghiulare ω și 3×2 componente ale forțelor de legătură $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{R}_B$. Problema este analogă celei a solidului rigid cu axă fixă.

Pentru determinarea unghiurilor lui Euler se alege reperul solidar cu solidul rigid, cu originea în A și astfel încât direcția $\mathbf{t}_3$ să coincidă cu direcția AB. Atunci, cunoscând mișcarea dreptei AB,

$$\mathbf{t}_3 = \sin \theta \sin \psi \mathbf{I}_1 - \sin \theta \cos \psi \mathbf{I}_2 + \cos \theta \mathbf{I}_3,$$

se pot considera cunoscute unghiurile θ și ψ . A treia ecuație din teorema momentului cinetic (proiecția pe direcția AB) devine o ecuație diferențială de ordinul al doilea în φ . Cele cinci ecuații scalare rămase vor permite determinare proiecțiilor forțelor de legătură pe direcțiile $\mathbf{t}_1$ și $\mathbf{t}_2$ și numai suma componentelor pe direcția $\mathbf{t}_3$.

4.1.7. Să se studieze cazul particular al problemei precedente, când punctul A este fix, $A \equiv O$, iar dreapta AB, axă principală de inerție prin A, descrie un con circular cu o mișcare uniformă în jurul axei conului.

Reperul solidar cu rigidul are originea în $A \equiv O$ și direcția $\mathbf{t}_3$ după AB. Punctul B va descrie o circumferință în plan ortogonal pe axa conului, viteza lui fiind tangentă la această circumferință, paralelă cu linia nodurilor. Se obține

$$V_B^1 = l\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, V_B^2 = -l\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, V_B^3 = 0 \quad (\|\mathbf{V}_B\| = l\dot{\psi} \sin \theta),$$

cu $\theta = \text{const.} (\dot{\theta} \equiv 0)$ și $\dot{\psi} = \text{const.}$ (rotație uniformă). Prin urmare

$$\begin{cases} \omega^1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega^2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega^3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\omega}^1 = \dot{\varphi}(\dot{\psi} \sin \theta) \cos \varphi \\ \dot{\omega}^2 = -\dot{\varphi}(\dot{\psi} \sin \theta) \sin \varphi \\ \dot{\omega}^3 = \ddot{\varphi} \end{cases}.$$

Introducând aceste rezultate în ecuația momentului cinetic în proiecție pe dreapta AB rezultă

$$I_A^{33} \ddot{\varphi} + \frac{1}{2}(\dot{\psi} \sin \theta)^2 (I_A^{22} - I_A^{11}) \sin 2\varphi = M_A^3$$

sau notând

$$\Phi = 2\varphi, \quad k = \dot{\psi}^2 \frac{I_A^{22} - I_A^{11}}{I_A^{33}} \sin^2 \theta = \text{const.}$$

se obține

$$\ddot{\Phi} + k \sin \Phi = \frac{2M_A^3}{I_A^{33}}.$$

Partea omogenă a acestei ecuații este similară ecuației pendulului matematic.

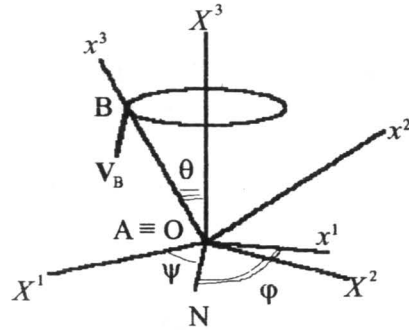


Figura 4.1.7

§4.2. Statica solidului rigid

Teorema de echilibru a solidului rigid liber: Un solid rigid liber supus acțiunii unui sistem de forțe și momente date este în echilibru față de un reper inerțial dacă și numai dacă torsorul acestor forțe în raport cu un pol arbitrar este nul.

Teorema de echilibru a solidului rigid supus la legături ideale: Un solid rigid supus la legături ideale este în echilibru față de un reper inerțial dacă și numai dacă torsorul forțelor efective și de legătură în raport cu un pol arbitrar este nul.

Teorema de echilibru a solidului rigid supus la legături reale: Un solid rigid supus la legături reale (cu frecare) este în echilibru față de un reper inerțial dacă și numai dacă torsorul forțelor efective și de legătură în raport cu un pol arbitrar este nul și sunt satisfăcute legile frecării.

Teorema echilibrului părților: Dacă un sistem de solide rigide este în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe efective și de legătură, atunci orice parte a sa (orice subsistem) va fi în echilibru sub acțiunea forțelor efective și de legătură aferente acesteia.

Problematica staticii: determinarea pozițiilor de echilibru și a forțelor de legătură.

s – numărul de grade de libertate al solidului supus la legături ideale,

m – numărul de mărimi scalare necesar pentru determinarea forțelor de legătură;

$s + m = 6$ – solidul rigid este *static determinat* (izostatic);

$s + m > 6$ – solidul rigid este *static nedeterminat* (hiperstatic);

$s + m < 6$ – problema este în general imposibilă.

În general, pentru legături reale există zone de echilibru. legile frecării rezultă din cele expuse la începutul capitolului.

4.2.1. O bară omogenă grea AB se sprijină cu capetele sale pe două plane lucii, înclinate cu unghiurile α respectiv β față de orizontală. Să se arate că poziția de echilibru este definită prin relația

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b \operatorname{ctg} \beta - a \operatorname{ctg} \alpha}{a + b}$$

unde θ este unghiul barei cu planul orizontal, iar $a = AC$, $b = CB$, C fiind centrul de masă al barei. Să se determine reacțiunile în A și B.

Se consideră că echilibrul are loc în planul vertical corespunzător direcțiilor de pantă maximă ale planelor înclinate.

Fie O urma liniei orizontale de intersecție a celor două plane și D punctul de intersecție al suporturilor reacțiunilor normale în A și B. Aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile DAC și DBC, rezultă

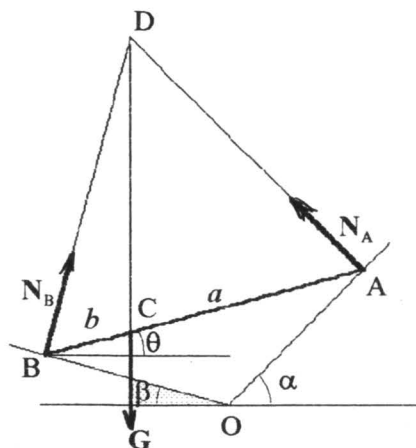


Figura 4.2.1a

$$\left. \begin{aligned} \frac{DC}{a} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \theta)\right)}{\sin \alpha} \\ \frac{DC}{b} &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \theta\right)}{\sin \beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \quad \text{tg } \theta = \frac{b \text{ ctg } \beta - a \text{ ctg } \alpha}{a + b}.$$

În figura 4.2.1b este prezentată, pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{12}$, variația unghiului θ în funcție de raportul $k = \frac{a}{b}$ în care centrul de masă C împarte segmentul AB .

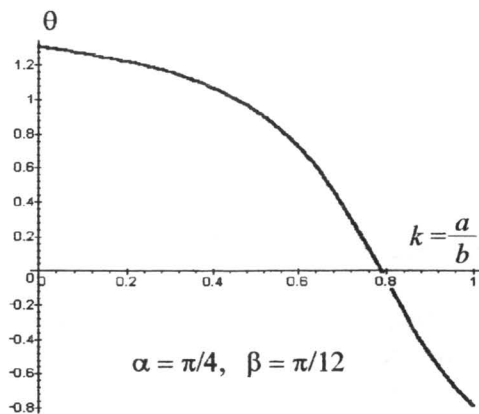


Figura 4.2.1b

În figura 4.2.1c este prezentată variația unghiului θ în funcție de unghiurile α, β ale planelor înclinate cu orizontala pentru două valori particulare ale raportului k : $k = 0.05$ și $k = 0.45$.

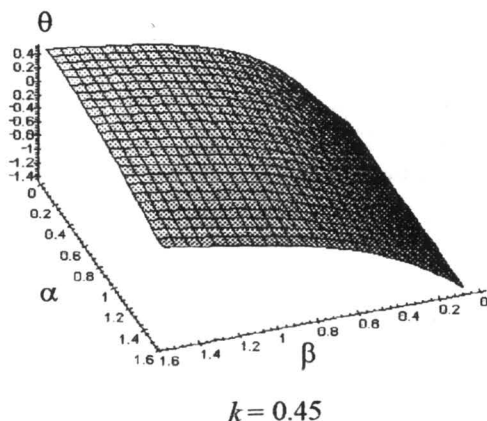
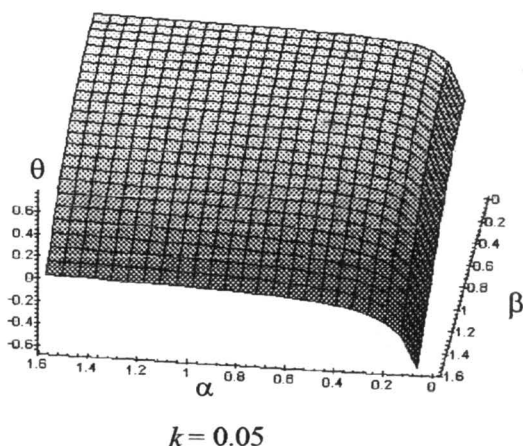


Figura 4.2.1c

Din condițiile de echilibru se obține

$$\begin{cases} N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0 \\ N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta = G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ N_B = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{cases}.$$

Observație. Cunoașterea poziției de echilibru permite determinarea poziției centrului de masă: din vârful D al triunghiului ABD se coboară perpendiculara pe planul orizontal; ea intersectează AB în centrul de masă C (forța de greutate și forțele de legătură formează un sistem echivalent cu zero; pentru reducerea sistemului, vectorii trebuie să aibă suporturi concurente).

4.2.2. Un cilindru omogen, de greutate G , se află pe două plane înclinate cu unghiurile α respectiv β față de orizontală. Se cer reacțiunile în punctele de contact (Leibnitz).

Pentru problema plană de echilibru (N_A și N_B – rezultante ale forțelor normale ce acționează de-a lungul generatoarelor de contact ale cilindrului cu planele înclinate) este

valabilă o singură condiție vectorială de echilibru (Varignon)

$$\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

sau condițiile scalare

$$\begin{cases} N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0 \\ N_A \cos \alpha + N_B \cos \beta = G \end{cases}$$

de unde

$$N_A = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad N_B = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Poziția de echilibru este în acest caz deplin determinată prin considerente geometrice.

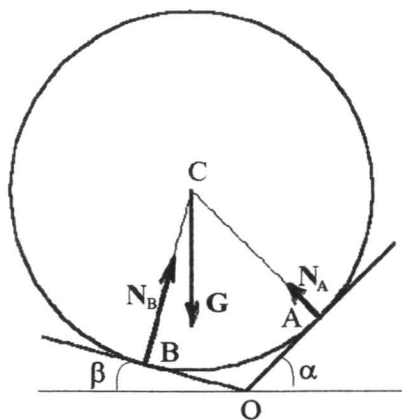


Figura 4.2.2

4.2.3. Aceeași problemă pentru doi cilindri omogeni de greutăți G_1 respectiv G_2 . Să se determine reacțiunile în punctele de contact și unghiul liniei centrelor cu orizontala (Walton).

N_A și N_B fiind rezultantele reacțiunilor normale în punctele generatoarelor de contact cu planele înclinate, iar N – rezultanta forțelor de contact între cilindri, condițiile de echilibru pentru cei doi cilindri, scrise în planul median ce conține forțele date și de legătură, sunt

$$\begin{cases} \mathbf{N}_A + \mathbf{N} + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_B - \mathbf{N} + \mathbf{G}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

sau, în proiecție pe direcțiile orizontală și verticală

$$\begin{cases} -N \sin \varphi - N_A \cos \alpha = G_1 \\ -N \cos \varphi + N_A \sin \alpha = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} N \sin \varphi + N_B \cos \beta = G_2 \\ N \cos \varphi + N_B \sin \beta = 0 \end{cases},$$

Poziția de echilibru se obține privind condițiile de mai sus ca pe un sistem algebric linear în reacțiuni (4 ecuații, 3 necunoscute). Prin anularea determinantului matricei extinse, se obține

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{G_1 \operatorname{ctg} \beta - G_2 \operatorname{ctg} \alpha}{G_1 + G_2}.$$

În figura 4.2.3b este prezentată variația unghiului φ în funcție de caracteristicile celor doi cilindri: raportul razelor r_1/r_2 și raportul densităților ρ_1/ρ_2 , pentru valorile particulare ale unghiurilor de înclinare ale planelor $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$.

Pentru forțele de legătură rezultă

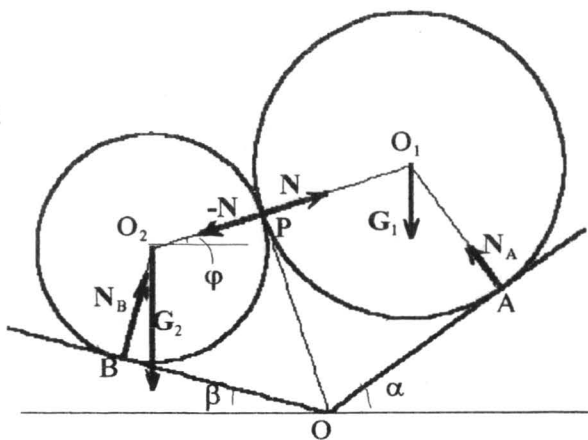


Figura 4.2.3a

$$\alpha = \pi/5, \quad \beta = \pi/12$$

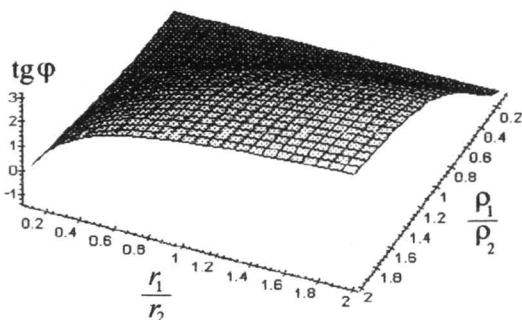


Figura 4.2.3b

$$\left\{ \begin{array}{l} N_A = (G_1 + G_2) \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \\ N_B = (G_1 + G_2) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ N = G_1 \frac{\sin \alpha \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} + G_2 \frac{\sin \beta \sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} \end{array} \right.$$

4.2.4. O bară omogenă grea AB, de lungime $2l$ și greutate G , se reazemă în punctele A și B pe două plane fixe lucii, care formează între ele unghiul α . Bara se reazemă pe planul orizontal sub unghiul β , iar pentru a se menține în echilibru este legată de punctul de intersecție al planelor (în planul vertical în care se găsește bara) cu firul OD care formează cu planul orizontal unghiul γ . Se cere tensiunea în fir și reacțiunile în punctele A și B. Discuție.

Intre elementele geometrice există relațiile

$$AA' = 2l \sin \beta, \quad A'C = 2l \sin \beta \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$BC = 2l \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad BB' = 2l \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \sin \gamma.$$

Condițiile de echilibru ale barei sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} + \mathbf{T} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{BC} \times \mathbf{G} + \overrightarrow{BD} \times \mathbf{T} + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{N}_A = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

și conduc la ecuațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} N_B \sin \alpha - T \cos \gamma = 0 \\ -N_B \cos \alpha + N_A - T \sin \gamma = G \\ N_A \cos(\alpha + \beta) + \\ + T \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \sin \gamma = -\frac{1}{2} G \cos \beta \end{array} \right.$$

Rezultă

$$\left\{ \begin{array}{l} N_B = -G \frac{\cos \beta \cos \gamma}{2 \cos(\alpha + \beta - \gamma)} \\ N_A = G \left[1 - \frac{\cos \beta \cos(\alpha - \gamma)}{2 \cos(\alpha + \beta - \gamma)} \right] \\ T = -G \frac{\cos \beta \sin \alpha}{2 \cos(\alpha + \beta - \gamma)} \end{array} \right.$$

Echilibrul este posibil dacă

$$T > 0, \quad N_A > 0, \quad N_B > 0.$$

Se obține

$$a) \quad T > 0, N_B > 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta - \gamma) < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta - \gamma \leq \frac{3\pi}{2};$$

$$b) \quad N_A > 0 \Rightarrow \cos \beta \cos(\alpha - \gamma) \leq 2 \cos(\alpha + \beta - \gamma),$$

de unde

$$\operatorname{tg} \gamma \geq \frac{2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1}{2 \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}.$$

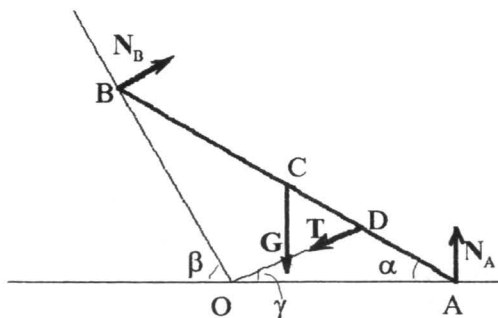


Figura 4.2.4

În cazul particular al planelor ortogonale $\alpha = \frac{\pi}{2}$, se obține

$$\begin{cases} N_B = G \frac{\cos \beta \cos \gamma}{2 \sin (\beta - \gamma)} \\ N_A = G \left[1 + \frac{\cos \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta - \gamma)} \right] \\ T = G \frac{\cos \beta}{2 \sin (\beta - \gamma)} \end{cases}.$$

Echilibrul este posibil dacă

- a) $T > 0, N_B > 0 \Rightarrow \sin (\beta - \gamma) > 0 \Rightarrow 0 \leq \beta - \gamma \leq \pi;$
b) $N_A > 0 \Rightarrow \cos \beta \sin \gamma \leq -2 \sin (\beta - \gamma) \Rightarrow 2 \operatorname{tg} \beta \leq \operatorname{tg} \gamma.$

4.2.5. Într-un vas semisferic neted, fix, de rază $OD = r$, este așezată o bară AB de lungime $2l$ și greutate G . Să se determine poziția de echilibru și reacțiunile din punctele A și B pentru echilibru. Discuție.

Poziția barei în secțiunea vasului prin O este determinată de unghiul $\varphi = \angle OAC$.

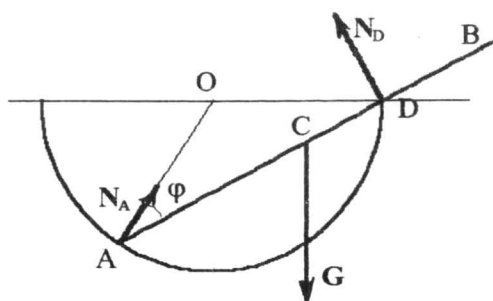


Figura 4.2.5a

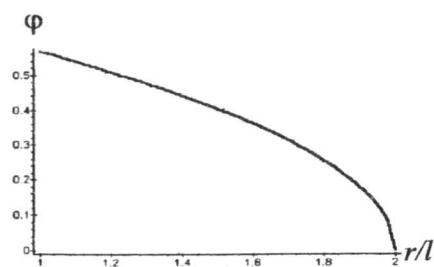


Figura 4.2.5b

Condițiile de echilibru

$$\begin{cases} \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_D + \mathbf{G} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{AD} \times \mathbf{N}_D + \overrightarrow{AC} \times \mathbf{G} = \mathbf{0} \end{cases}$$

conduc la ecuațiile scalare

$$\begin{cases} N_A \cos \varphi - G \sin \varphi = 0 \\ N_A \sin \varphi + N_D - G \cos \varphi = 0 \\ 2r N_D \cos \varphi - l G \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

Privind aceste relații ca pe un sistem algebric omogen în N_A , N_D și G , care admite soluție nebanală, poziția de echilibru va fi determinată prin anularea determinantului sistemului

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & 1 & -\cos \varphi \\ 0 & 2r \cos \varphi & -l \cos \varphi \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cos \varphi [4r \cos^2 \varphi - l \cos \varphi - 2r] = 0.$$

$$\cos \varphi = 0$$

corespunde poziției orizontale a barei, ceea ce constituie un caz degenerat al problemei.; oricum ar trebui ca $l > r$.

Ecuția de gradul doi în $\cos \varphi$ are soluțiile

$$\cos \varphi = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32r^2}}{8r}.$$

Deoarece se presupune $\cos \varphi > 0$ se păstrează doar soluția

$$\cos \varphi = \frac{l + \sqrt{l^2 + 32r^2}}{8r}.$$

În plus $\cos \varphi \leq 1$ deci

$$\frac{l + \sqrt{l^2 + 32r^2}}{8r} \leq 1 \Rightarrow l^2 + 32r^2 \leq (8r - l)^2 \Rightarrow l \leq 2r,$$

echilibrul fiind deci posibil dacă centrul de masă se află în stânga punctului de rezemare D.

În figura 4.2.5b este prezentată dependența unghiului φ de raportul r/l .

Reacțiunile au valorile

$$N_A = G \operatorname{tg} \varphi, \quad N_D = G \frac{l}{2r}.$$

4.2.6. Se consideră sistemul din problema precedentă dar cu vas mobil pe un plan orizontal fix. Greutatea vasului este G_v . Să se determine poziția de echilibru și reacțiunile în punctele A, D, E.

Poziția barei este determinată de doi parametri: $\varphi = \angle OAC$, $\psi = \angle OFE$.

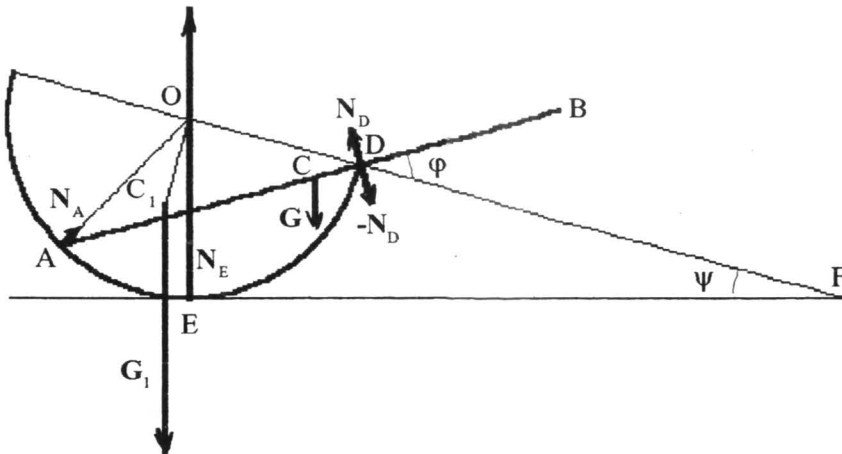


Figura 4.2.6

Echilibrul sistemului format din bară și vas este dat de condițiile

$$\begin{cases} \mathbf{N}_E + \mathbf{G} + \mathbf{G}_v = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{OC} \times \mathbf{G} + \overrightarrow{OC_v} \times \mathbf{G}_v = \mathbf{0} \end{cases}$$

iar cel al barei de condițiile

$$\begin{cases} \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_D + \mathbf{G} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{AD} \times \mathbf{N}_D + \overrightarrow{AC} \times \mathbf{G} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Se obțin relațiile

$$\begin{cases} N_E = G + G_v \\ (r \cos(2\varphi - \psi) - l \cos(\varphi - \psi))G + aG_v \sin \psi = 0 \\ \begin{cases} N_A \cos(2\varphi - \psi) + N_D \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \psi\right) = 0 \\ N_A \sin(2\varphi - \psi) + N_D \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \psi\right) = G \\ 2rN_D \cos \varphi - lG \cos(\varphi - \psi) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Rezultă poziția de echilibru definită prin

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{Gr}{G_v a} \sin \varphi + \frac{2r}{l} \cos 2\varphi \\ \operatorname{ctg} \psi = \frac{2aG_v - lG \sin \varphi}{lG \cos \varphi} \end{cases}$$

și forțele de legătură

$$\begin{cases} N_A = G \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\cos \varphi} \\ N_D = G \frac{\cos(2\varphi - \psi)}{\cos \varphi} \\ N_E = G + G_v \end{cases}$$

Sistemul trigonometric care definește poziția de echilibru admite mai multe soluții, dintre acestea se alege soluția care satisface condiția $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\psi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Pentru diferite valori ale raportului dimensiunilor caracteristice $m = 2r/l \geq 1$ și respectiv ale raportului greutateilor $q = G/G_v \in (0, 1)$ au fost determinate soluțiile sistemului trigonometric, subliniindu-se soluția corectă

```
> q:=0.2886751347; m:=1.154700539;
> sol:=solve({2*q*sin(phi)+m*cos(2*phi)-cos(phi),2*q*(sin(phi)+cos(phi)*cot(psi))-m},{phi,psi});
sol := {phi = -.1745329257, psi = .4254013232}, {phi = 1.919862177, psi = 2.829562914},
{phi = -2.268928028, psi = 2.913260149}, {phi = .5235987762, psi = .5235987755}
> q:=0.5; m:=1.931851653;
> sol:=solve({2*q*sin(phi)+m*cos(2*phi)-cos(phi),2*q*(sin(phi)+cos(phi)*cot(psi))-m},{phi,psi});
sol := {phi = -2.356194490, psi = 2.879793266}, {psi = .5235987755, phi = .7853981634},
{phi = 1.981460058, psi = 2.766858221}, {phi = -.4106637308, psi = .3747344327}
> q:=0.5; m:=2.414213562;
> sol:=solve({2*q*sin(phi)+m*cos(2*phi)-cos(phi),2*q*(sin(phi)+cos(phi)*cot(psi))-m},{phi,psi});
sol := {phi = -.4881468020, psi = .2972513614}, {psi = 2.918812027, phi = -2.356194490},
{psi = .3926990818, phi = .7853981634}, {phi = 2.058943128, psi = 2.844341292}
> q:=0.1830127019; m:=1.366025404;
> sol:=solve({2*q*sin(phi)+m*cos(2*phi)-cos(phi),2*q*(sin(phi)+cos(phi)*cot(psi))-m},{phi,psi});
sol := {psi = 3.006051772, phi = -2.234906082}, {psi = .2617993878, phi = .5235987758},
{psi = .2280584773, phi = -.3384740864}, {psi = 2.980968914, phi = 2.049781394}
```

Rezultatele obținute numeric pot fi comparate cu soluțiile exacte din tabel:

q	m	φ	ψ
$\frac{\sqrt{3}}{6} =$ $= 0.2886751347$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} =$ $= 1.154700539$	$\frac{\pi}{6} =$ $= 0.5235987758$	$\frac{\pi}{6} =$ $= 0.5235987758$
$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1) =$ $= 1.931851653$	$\frac{\pi}{4} =$ $= 0.7853981635$	$\frac{\pi}{6} =$ $= 0.5235987758$
$\frac{1}{2} = 0.5$	$\sqrt{2} + 1 =$ $= 2.414213562$	$\frac{\pi}{4} =$ $= 0.7853981635$	$\frac{\pi}{8} =$ $= 0.3926990818$
$\frac{\sqrt{3} - 1}{4} =$ $= 0.1830127019$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2} =$ $= 1.366025404$	$\frac{\pi}{6} =$ $= 0.5235987758$	$\frac{\pi}{12} =$ $= 0.2617993878$

În particular, cazul echilibrului cu bara orizontală este posibil numai dacă

$$\frac{G_v}{G} = \frac{lr}{a\sqrt{4r^2 - l^2}}$$

și este realizat cu următoarele caracteristici

$$\sin \varphi = \frac{l}{2a} \cdot \frac{G}{G_v}, \quad \cos \varphi = \frac{l}{2r},$$

$$N_A = 0, \quad N_D = G, \quad N_E = G + G_v.$$

4.2.7. O placă subțire având forma unui triunghi dreptunghic isoscel ABC, de ipotenuză a și greutate G , se reazemă cu catetele pe două cuie netede D și E, aflate la aceeași înălțime, la distanța $d < a$. Ce unghi φ face înălțimea AA' cu verticala în poziția de echilibru? Să se determine reacțiunile în D și E.

Fie O centrul de masă al plăcii. Condițiile echilibru

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{N}_D + \mathbf{N}_E = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{OD} \times \mathbf{N}_D + \overrightarrow{OE} \times \mathbf{N}_E = \mathbf{0} \end{cases}$$

dau în proiecție pe direcțiile AD și AE

$$\begin{cases} N_D - G \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = 0 \\ N_E - G \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = 0 \\ N_D \left[d(\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{a}{3} \right] + \\ - N_E \left[d(\cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{a}{3} \right] = 0 \end{cases}$$

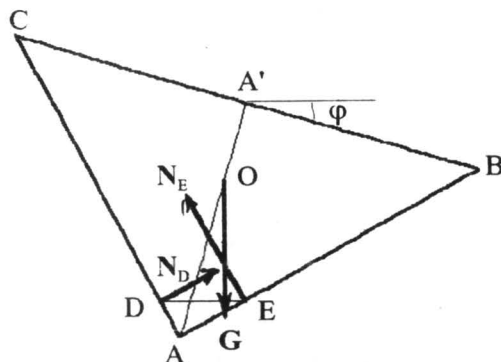


Figura 4.2.7

Poziția de echilibru rezultă considerând aceste ecuații ca pe un sistem algebric compatibil în N_D și N_E , deci cu matricea extinsă de rang 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \\ 0 & 1 & \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \\ \left[d(\cos \varphi - \sin \varphi) - \frac{a}{3}\right] & -\left[d(\cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{a}{3}\right] & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adică

$$\sin \varphi \left[\cos \varphi - \frac{a}{6d} \right] = 0.$$

Această ecuație conduce la următoarele situații

a) $\varphi = 0, \quad N_D = N_E = G \frac{\sqrt{2}}{2};$

b) dacă $\frac{a}{6d} \leq 1$ încă două poziții simetrice față de mediatoarea lui DE

$$\cos \varphi_0 = \frac{a}{6d}, \quad \varphi = \pm \varphi_0, \quad N_D = G \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi), \quad N_E = G \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi).$$

4.2.8. O bară omogenă AB de lungime $2l$ și greutate G se reazemă cu capătul A pe partea interioară a unei parabole și pe un cui plasat în focar. Să se determine unghiul φ al barei cu axa verticală a parabolei în poziția de echilibru și reacțiunile în A și F.

Ecuația parabolei, în coordonate polare cu originea în focar, este

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi};$$

atunci

$$A \left(\frac{p \sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \frac{1}{2} \frac{p \sin^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} \right), \quad F \left(0, \frac{p}{2} \right)$$

Fie α unghiul normalei în A cu direcția orizontală

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \frac{x}{p} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \\ \Rightarrow \quad \alpha &= \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

Condițiile de echilibru

$$\begin{cases} \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_F + \mathbf{G} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{AC} \times \mathbf{G} + \overrightarrow{AF} \times \mathbf{N}_F = \mathbf{0} \end{cases}$$

dau prin proiecție pe axe

$$\begin{cases} N_A \cos \alpha - N_F \cos \varphi = 0 \\ N_A \sin \alpha + N_F \sin \varphi = G \\ r N_F = l G \sin \varphi \end{cases}$$

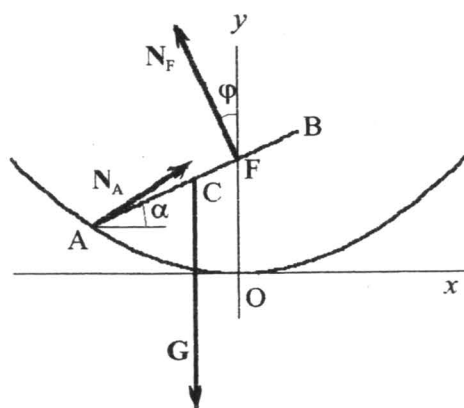


Figura 4.2.8

Poziția de echilibru se obține considerând aceste ecuații drept un sistem algebric linear compatibil în N_A, N_F

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\cos \varphi & 0 \\ \sin \alpha & \sin \varphi & 1 \\ 0 & \frac{p}{1 + \cos \varphi} & l \sin \varphi \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\sin \frac{\varphi}{2} \left[4l \cos^4 \frac{\varphi}{2} - p \right] = 0$$

Valoarea semnificativă este $\cos \frac{\varphi_0}{2} = \left(\frac{p}{4l} \right)^{1/4}$. Pentru ea se obține

$$N_A = G \frac{\cos \varphi_0}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}, \quad N_F = G \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2}.$$

4.2.9. O bară AB, de lungime $2l$ și greutate G , se reazemă pe un perete vertical luciu și pe o curbă (C). Să se determine ecuația curbei (C) astfel încât bara să se găsească în echilibru în orice poziție.

Condițiile de echilibru sunt

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{BA} \times \mathbf{N}_A + \overrightarrow{BC} \times \mathbf{G} = \mathbf{0} \end{cases}$$

și conduc la ecuațiile

$$\begin{cases} N_A - N_B \sin \alpha = 0 \\ G - N_B \cos \alpha = 0 \\ 2N_A \cos \gamma - G \sin \gamma = 0 \end{cases}.$$

Privind aceste trei ecuații ca pe un sistem algebric linear, omogen în N_A, N_B, G cu soluție nebanală, rezultă condiția

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 1 \\ 2 \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Dar

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x_B), \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{x_B}{y_A - y_B} = \frac{x_B}{\pm \sqrt{4l^2 - x_B^2}}$$

deci ecuația diferențială a curbei căutate este

$$2y' = \frac{x}{\pm \sqrt{4l^2 - x^2}}$$

Prin urmare, curba căutată este elipsa

$$x^2 + 4(y - y_0)^2 = 4l^2.$$

Reacțiunile sunt

$$N_A = G \operatorname{tg} \alpha, \quad N_B = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

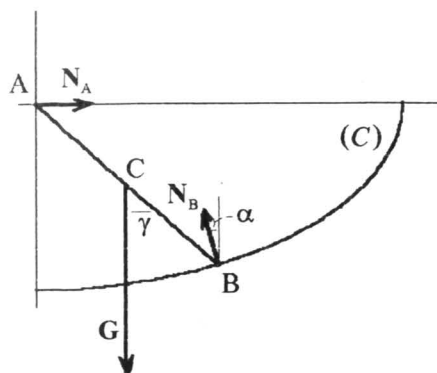


Figura 4.2.9

4.2.10. O masă rotundă de rază r are trei picioare ale căror capete formează un triunghi echilateral ABC, de latură a . Greutatea mesei este G și este aplicată într-un punct pe axa mesei trecând prin O. Pe marginea mesei, în punctul D, OD perpendicular pe AC, se află o greutate P . Să se determine presiunea picioarelor mesei pe podea și valoarea greutății P ce va răsturna masa.

Condițiile de echilibru

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + \mathbf{N}_C = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{\text{EA}} \times \mathbf{N}_A + \overrightarrow{\text{EB}} \times \mathbf{N}_B + \overrightarrow{\text{EC}} \times \mathbf{N}_C + \overrightarrow{\text{EO}'} \times \mathbf{G} + \overrightarrow{\text{ED}'} \times \mathbf{P} = \mathbf{0} \end{cases}$$

se explicitază prin proiecție pe direcțiile $\mathbf{l}_1 = \text{versor}(\overrightarrow{\text{AC}})$, $\mathbf{l}_2 = \text{versor}(\overrightarrow{\text{D'B}})$, $\mathbf{l}_3 = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$

$$N_A + N_B + N_C - P - G = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 \\ -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & N_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 \\ \frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_C \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \mathbf{l}_3 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{6} - r & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\begin{cases} N_A + N_B + N_C - P - G = 0 \\ N_A - N_C = 0 \\ \left(r - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)P - \frac{a\sqrt{3}}{6}(G - 3N_B) = 0 \end{cases}$$

de unde

$$N_A = N_C = \frac{G+P}{3} + \frac{r}{a\sqrt{3}}P, \quad N_B = \frac{G+P}{3} - \frac{2r}{a\sqrt{3}}P.$$

Pentru ca masa să se răstoarne se impune condiția

$$N_B \leq 0 \quad \text{adică} \quad P \geq \frac{a}{2r\sqrt{3} - a}G.$$

Dacă $r \leq \frac{a}{2\sqrt{3}}$, atunci oricare ar fi P , $N_B > 0$ și masa nu se răstoarnă.

4.2.11. O bară omogenă OA de lungime a și greutate G este articulată în O și se reazemă pe un cilindru de rază r , legat în O printr-un fir inextensibil OB de lungime l . Să se determine tensiunea în fir și reacțiunile pentru echilibru.

Echilibrul ansamblului este realizat dacă este realizat echilibrul părților. Condițiile de echilibru pentru bară respectiv pentru cilindru sunt

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{R} + \mathbf{N} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{\text{OC}} \times \mathbf{G} + \overrightarrow{\text{OE}} \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \mathbf{G}_1 - \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{N}_D = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{\text{OD}} \times (\mathbf{G}_1 + \mathbf{N}_D) - \overrightarrow{\text{OE}} \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \end{cases}.$$

Se obțin ecuațiile

$$\begin{cases} R_1 - N \sin 2\alpha = 0 \\ R_2 + N \cos 2\alpha = G \\ \sqrt{l^2 - r^2} N = \frac{a}{2} G \cos 2\alpha \end{cases},$$

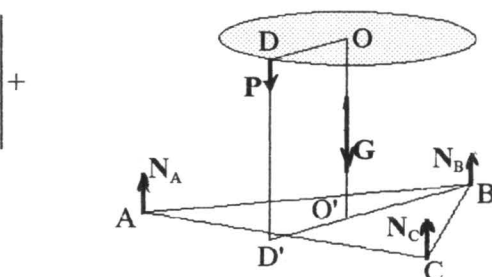


Figura 4.2.10

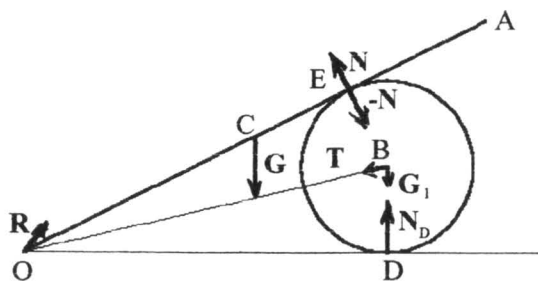


Figura 4.2.11

$$\begin{cases} N \sin 2\alpha - T \cos \alpha = 0 \\ N_D - N \cos 2\alpha - T \sin \alpha = G_1, \sin \alpha = \frac{r}{l} \\ N_D - N = G_1 \end{cases}$$

Rezultă

$$\left\{ \begin{array}{l} N = G \frac{a}{2\sqrt{l^2 - r^2}} \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2} \right) \\ R_1 = G \frac{ar}{l^2} \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2} \right), R_2 = G \left[1 - \frac{a}{2\sqrt{l^2 - r^2}} \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2} \right) \right] \\ N_D = G_1 + G \frac{a}{2\sqrt{l^2 - r^2}} \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2} \right) \\ T = G \frac{ar}{l\sqrt{l^2 - r^2}} \left(1 - 2\frac{r^2}{l^2} \right) \end{array} \right.$$

4.2.12. O scară AB de lungime l și greutate G se sprijină cu capătul A pe un plan orizontal și cu capătul B pe un plan vertical. Pe scară, în punctul M, se găsește un om de greutate P . Cunoscând coeficienții de frecare f_1 și f_2 în punctele A și B, să se determine unghiul α de înclinare a scării pentru echilibru, în funcție de distanța $AM = a$.

Condițiile de echilibru și de frecare

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{P} + \mathbf{N}_A + \mathbf{\Phi}_A + \mathbf{N}_B + \mathbf{\Phi}_B = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{OC} \times \mathbf{G} + \overrightarrow{OM} \times \mathbf{P} + \overrightarrow{OA} \times \mathbf{N}_A + \overrightarrow{OB} \times \mathbf{N}_B = \mathbf{0} \\ \left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{\Phi}_A\| \leq f_1 \|\mathbf{N}_A\| \\ \|\mathbf{\Phi}_B\| \leq f_2 \|\mathbf{N}_B\| \end{array} \right. \end{cases}$$

conduc la ecuațiile

$$\begin{cases} N_A + \Phi_B - G - P = 0 \\ N_B - \Phi_A = 0 \\ l \cos \alpha N_A - l \sin \alpha N_B - \frac{l}{2} \cos \alpha G - (l - a) \cos \alpha P = 0 \end{cases},$$

și la inegalitățile

$$\begin{cases} \Phi_A \leq f_1 N_A \\ \Phi_B \leq f_2 N_B \end{cases}.$$

În cazul echilibrului limită

$$\Phi_A = f_1 N_A, \Phi_B = f_2 N_B$$

poziția de echilibru se obține privind ecuațiile de echilibru ca un sistem algebric compatibil de trei ecuații cu necunoscutele N_A, N_B

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 & G+P \\ -f_1 & 1 & 0 \\ l \cos \alpha & -l \sin \alpha & \left[\frac{l}{2} G + (l-a)P \right] \cos \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 + f_1 f_2}{f_1} \left(\frac{a}{l} \frac{P}{G+P} - \frac{1}{2} \frac{G}{G+P} \right) - f_2.$$

Condiția de echilibru este deci

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1+f_1 f_2}{f_1}\left(\frac{a}{l} \frac{P}{G+P}+\frac{1}{2} \frac{G}{G+P}\right)-f_2 .$$

În rezultatul de mai sus sunt cuprinse două cazuri particulare

- a) pe scară nu se află nici un om ($P=0$); condiția de echilibru devine

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1-f_1 f_2}{2 f_1} ;$$

În figura 4.2.12 sunt reprezentate domeniile în interiorul cărora trebuie să se găsească forțele de legătură pentru ca echilibrul să fie posibil.

- b) greutatea scării este neglijabilă în comparație cu cea a omului ($G=0$); condiția de echilibru devine

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1+f_1 f_2}{f_1} \cdot \frac{a}{l}-f_2 ;$$

cazul cel mai dezavantajos $a=l$, asigură echilibrul în orice poziție iar condiția de echilibru devine

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{f_1} .$$

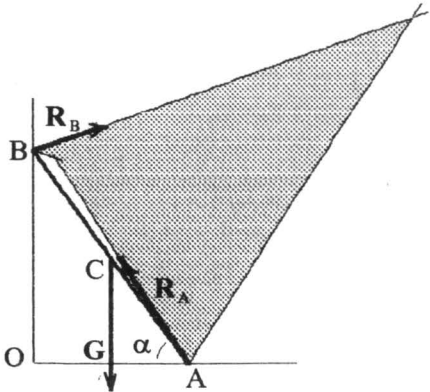


Figura 4.2.12

4.2.13. Un disc de rază r și de greutate G este așezat vertical pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, după direcția de pantă maximă. Cunoscând coeficienții de frecare de aderență f și de rostogolire δ , să se determine valoarea unghiului α , astfel încât discul să rămână în echilibru.

Condițiile de echilibru

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{G}+\mathbf{N}+\Phi=\mathbf{o} \\ \overrightarrow{OC} \times \mathbf{G}+\mathbf{M}_r=\mathbf{o} \end{array}\right\}, \quad\left\{\begin{array}{l} \|\Phi\| \leq f\|\mathbf{N}\| \\ \|\mathbf{M}_r\| \leq \delta\|\mathbf{N}\| \end{array}\right.$$

conduc la sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi-G \sin \alpha=0 \\ N-G \cos \alpha=0 \\ G r \sin \alpha-M_r=0 \end{array}\right.$$

și inegalitățile de frecare

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi \leq f N \\ M_r \leq \delta N \end{array}\right. .$$

Rezultă pentru unghiul α condițiile

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f, \quad \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{\delta}{r} .$$

În diagrama 4.2.13b s-au pus în evidență regiunile:

– echilibru pentru $\operatorname{tg} \alpha < \frac{\delta}{r}$,

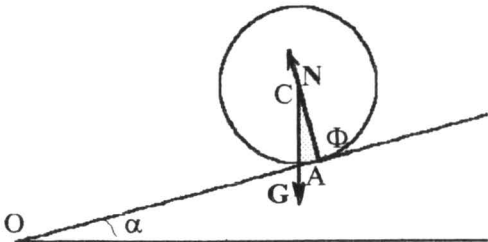


Figura 4.2.13a

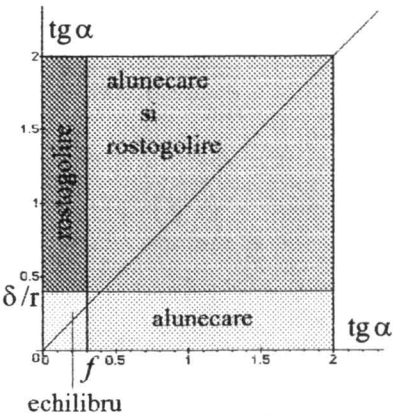


Figura 4.2.13b

- rostogolire fără alunecare pentru $\frac{\delta}{f} < \tan \alpha < f$,
- rostogolire cu alunecare pentru $\tan \alpha > f$.

4.2.14. Un disc de rază r și greutate G este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ajutorul unui fir paralel cu linia de pantă maximă a unui plan înclinat cu unghiul α . Cunoscând coeficienții de frecare de aderență f și de rostogolire δ , să se studieze condițiile de echilibru ale discului și să se determine tensiunea F în fir.

Condițiile de echilibru și condițiile de frecare

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{\Phi} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{OC} \times (\mathbf{G} + \mathbf{F}) + \mathbf{M}_r = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \begin{cases} \|\mathbf{\Phi}\| \leq f\|\mathbf{N}\| \\ \|\mathbf{M}_r\| \leq \delta\|\mathbf{N}\| \end{cases}$$

conduc la ecuațiile și inegalitățile

$$\begin{cases} F - \Phi - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ -Fr + Gr \sin \alpha + M_r = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Phi \leq fN \\ M_r \leq \delta N \end{cases}$$

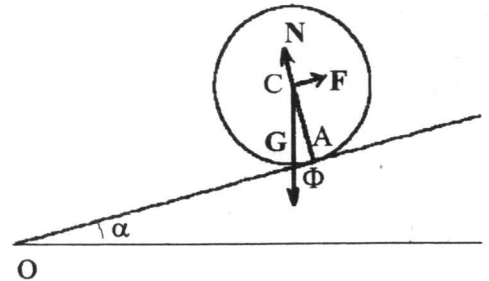


Figura 4.2.14

Dacă $f > \frac{\delta}{f}$, echilibrul se strică prin rostogolire; pentru echilibru trebuie ca

$$G(\sin \alpha - \frac{\delta}{f} \cos \alpha) \leq F \leq G(\sin \alpha + \frac{\delta}{f} \cos \alpha).$$

Dacă $f < \frac{\delta}{f}$, echilibrul se strică prin alunecare; pentru echilibru trebuie ca

$$G(\sin \alpha - f \cos \alpha) \leq F \leq G(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Pe baza relațiilor stabilite în această problemă se poate determina coeficientul de frecare de rostogolire (v.[13]).

4.2.15. Să se studieze echilibrul pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală al unui cilindru de rază r și greutate G , acționat de un cuplu motor de moment M și care trage o greutate F . Coeficienții de frecare de aderență f și de rostogolire δ se presupun cunoscuți.

Condițiile de echilibru și de frecare

$$\begin{cases} \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{\Phi} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ \overrightarrow{OC} \times (\mathbf{G} + \mathbf{F}) + \mathbf{M} + \mathbf{M}_r = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \begin{cases} \|\mathbf{\Phi}\| \leq f\|\mathbf{N}\| \\ \|\mathbf{M}_r\| \leq \delta\|\mathbf{N}\| \end{cases}$$

conduc la ecuațiile și inegalitățile

$$\begin{cases} -F + \Phi - G \sin \alpha = 0 \\ N - G \cos \alpha = 0 \\ Fr + Gr \sin \alpha - M + M_r = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \Phi \leq fN \\ M_r \leq \delta N \end{cases}$$

Condițiile de echilibru devin

$$\begin{cases} F \leq G(f \cos \alpha - \sin \alpha) \\ M \leq Fr + G(r \sin \alpha + \delta \cos \alpha) \end{cases}$$

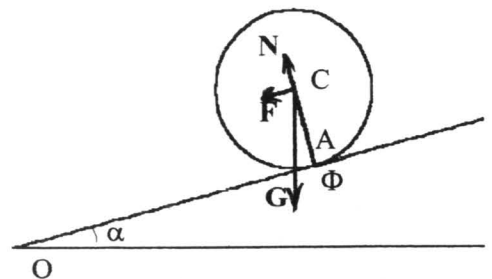


Figura 4.2.15

§4.3. Dinamica solidului rigid liber

4.3.1. Să se studieze mișcarea unui solid rigid greu liber la suprafața Pământului, neglijând rezistența mediului.

Reperul solidar cu rigidul are originea în centrul de masă al corpului C. Asupra corpului acționează numai greutatea proprie $M\mathbf{g}$, aplicată în centrul de masă.

Principiul de bilanț al impulsului dă legea de mișcare a centrului de masă C al solidului rigid

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = M\mathbf{g}.$$

Această ecuație arată că centrul de masă are o mișcare plană, în planul vertical ce trece prin poziția inițială și conține suportul vitezei inițiale

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{X}_C^o + \mathbf{V}_C^o t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

(momentul inițial $t^o = 0$). Traectoria centrului de masă este, în general, un arc de parabolă cu concavitatea în jos. În cazul unei viteze inițiale verticale sau nule, mișcarea are loc pe verticală (v. problemele privind mișcarea punctului material greu în vid din partea I, §3.3).

Principiul de bilanț al momentului cinetic în raport cu centrul de masă se scrie

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0},$$

$\boldsymbol{\omega}$ fiind viteza unghiulară a reperului solidar cu rigidul față de referențialul inerțial considerat. Din principiul de bilanț al momentului cinetic rezultă integrala primă

$$\mathbf{I}_C (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^o) = \mathbf{0},$$

$\boldsymbol{\omega}^o$ fiind viteza unghiulară inițială. Se disting două situații:

a) Solidul rigid nu este o bară rectilinie, deci tensorul de inerție în raport cu centrul de masă este pozitiv definit și deci nesingular. Din integrala primă rezultă

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o.$$

b) Solidul rigid este o bară rectilinie. În acest caz reperul solidar cu corpul având axa Ox^3 în lungul barei, tensorul de inerție are formă diagonală cu componentele

$$I_{C1} = I_{C2} > 0, I_{C3} = 0.$$

Integrala primă vectorială se reduce la două integrale prime scalare

$$\omega^1 = \omega^{1o}, \omega^2 = \omega^{2o}, \omega^3 = 0$$

(componenta vitezei unghiulare ω^3 după Ox^3 nici neputând fiind luată în considerare întrucât în acest caz rotația proprie nu se poate pune în evidență).

În cazul particular în care viteza unghiulară inițială $\boldsymbol{\omega}^o$ este nulă, solidul rigid nu se va roti, unghiurile lui Euler își vor păstra valorile inițiale

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \theta = \begin{cases} \neq 0 & \text{pentru } \theta^o \neq 0 \\ \equiv 0 & \text{pentru } \theta \equiv 0 \text{ sau } \theta \equiv \pi \end{cases};$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = 0 \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\Delta \neq 0} \begin{cases} \dot{\psi} = 0 \\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi \equiv \psi^o \\ \theta \equiv \theta^o \\ \varphi \equiv \varphi^o \end{cases},$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi = 0 \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi = 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\Delta=0} \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \equiv 0 \text{ sau } \theta \equiv \pi \\ \psi \equiv \psi^o \\ \varphi \equiv 0 \end{cases}.$$

Dacă viteza unghiulară este nenulă $\omega^o \neq 0$, pentru a simplifica determinarea unghiurilor lui Euler, se alege direcția I_3 astfel încât să coincidă cu direcția lui $K_C \equiv K_C^o = I_C \omega^o$, iar reperul solidar cu rigidul determinat de axele principale centrale de inerție. Mișcarea este caracterizată de

– integrala primă de conservare a momentului cinetic $K_C = I_C \omega^o$, care cuprinde

– conservarea mărimii momentului cinetic $\|K_C\| = \delta\mu$:

$$I_1^2(\omega^1)^2 + I_2^2(\omega^2)^2 + I_3^2(\omega^3)^2 = \delta^2\mu^2,$$

– conservarea direcției $K_C = \delta\mu I_3$:

$$\begin{cases} I_1\omega^1 = \delta\mu \sin \theta \sin \varphi \\ I_2\omega^2 = \delta\mu \sin \theta \cos \varphi \\ I_3\omega^3 = \delta\mu \cos \theta \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} I_1(\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) = \delta\mu \sin \theta \sin \varphi \\ I_2(\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) = \delta\mu \sin \theta \cos \varphi \\ I_3(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = \delta\mu \cos \theta \end{cases};$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} T &= U \\ T &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot I_C \omega \\ U &= M \mathbf{g} \cdot (\mathbf{X}_C - \mathbf{X}_C^o) + \frac{1}{2} M (\mathbf{V}_C^o)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega \cdot I_C \omega = \text{const.} \\ & I_1(\omega^1)^2 + I_2(\omega^2)^2 + I_3(\omega^3)^2 = \delta\mu^2. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{I_1 \omega^1}{I_2 \omega^2} \Rightarrow \varphi \equiv \varphi^o, \tan \varphi^o = \frac{I_1 \omega^1}{I_2 \omega^2} \\ \cos \theta &= \frac{I_3 \omega^3}{\delta\mu} \Rightarrow \theta \equiv \theta^o, \cos \theta^o = \frac{I_3 \omega^3}{\delta\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\omega^1 \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi}{\sin \theta} = \frac{I_1(\omega^1)^2 + I_2(\omega^2)^2}{\delta\mu \sin^2 \theta} = \frac{\delta\mu(\delta\mu^2 - I_3(\omega^3)^2)}{\delta^2\mu^2 - I_3^2(\omega^3)^2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \psi = \psi^o + \frac{\delta\mu(\delta\mu^2 - I_3(\omega^3)^2)}{\delta^2\mu^2 - I_3^2(\omega^3)^2} t. \end{aligned}$$

Determinarea unghiurilor lui Euler din această problemă este un caz particular al cazului Euler-Poinsot de la solidul cu punct fix.

Cele două ecuații vectoriale care guvernează mișcarea s-au separat în acest caz, făcând posibilă determinarea mișcării centrului de masă al corpului și a rotației în jurul acestuia, cele două componente ale mișcării – mișcarea de translație și mișcarea de rotație – fiind independente una de cealaltă.

4.3.2. Să se studieze mișcarea unei sfere rigide omogene în câmpul atracției universale exercitate de punctul O.

Atracția universală exercitată de punctul O asupra sferei este echivalentă cu o forță aplicată în centrul de masă al sferei și având direcția CO (rezultatul se obține similar celui de la problema 3.4.7, partea I)

$$\mathbf{F} = -\mu \frac{M}{\|\vec{OC}\|^3} \vec{OC}$$

($\mu = fM_*$, f – constanta de atracție universală, M_* – masa centrului atractiv O)

Considerând reperul inerțial cu originea în O (v. partea I, §3.4), mișcarea sferei în raport cu acest reper este dată de

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{X}}_C) = -\mu \frac{M}{\|\mathbf{X}_C\|^3} \mathbf{X}_C,$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}.$$

Teorema de mișcare a centrului de masă este într-un totu similară ecuației de mișcare a punctului material în câmpul atracției universale. Prin urmare centrul sferei descrie o conică (mișcare plană) având O drept focar, natura conicei depinde de condițiile inițiale. Sunt respectate și celelalte rezultate, precum legea ariilor și în cazul traiectoriei eliptice legea a treia a lui Kepler.

Mișcarea în jurul centrului de masă este similară celei de la problema precedentă, fiind o rotație uniformă caracterizată de viteza unghiulară inițială. Unghiurile lui Euler se obțin la fel ca în problema precedentă.

Cele două ecuații vectoriale care guvernează mișcarea s-au separat și în acest caz, făcând posibilă determinarea mișcării centrului de masă al corpului și a rotației în jurul acestuia, cele două componente ale mișcării – mișcarea de translație și mișcarea de rotație – fiind independente una de cealaltă.

Ținând seama de rezultatul problemei 3.4.7, partea I, enunțul problemei putea fi înlocuit prin "Să se studieze mișcarea unei sfere rigide omogene în câmpul atracției universale exercitate de o sferă omogenă cu centrul în punctul O" și rezolvarea era aceeași.

§4.4. Dinamica solidului rigid cu axă fixă

Fie $OX^1 X^2 X^3$ un referențial inercial și $Ox^1 x^2 x^3$ un reper solidar cu solidul rigid, astfel încât axele OX^3 și Ox^3 să coincidă cu axa fixă. Asupra solidului rigid acționează un sistem de forțe date având rezultanta F și momentul resultant M_O . Conform axiomei eliberării de legături, se consideră forțele de legătură R și R_1 acționând în punctele O și respectiv O_1 de pe axa fixă, $OO_1 = h$.

Fie M masa solidului rigid, x_C vectorul de poziție al centrului de masă în raport cu reperul solidar cu rigidul, I_O tensorul de inerție în raport cu reperul solidar cu rigidul, θ unghiul format de planul $Ox^1 x^3$ cu $OX^1 X^3$ (θ nu este aici nutația reperului mobil).

Principiile de bilanț ale impulsului și momentului cinetic, în proiecție pe axele reperului solidar cu rigidul, conduc la ecuațiile

$$\begin{cases} -Mx_C^2 \ddot{\theta} - Mx_C^1 \dot{\theta}^2 = F^1 + R^1 + R_1^1 \\ Mx_C^1 \ddot{\theta} - Mx_C^2 \dot{\theta}^2 = F^2 + R^2 + R_1^2 \\ 0 = F^3 + R^3 + R_1^3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -I_O^{13} \ddot{\theta} + I_O^{23} \dot{\theta}^2 = M_O^1 - hR_1^2 \\ -I_O^{23} \ddot{\theta} - I_O^{13} \dot{\theta}^2 = M_O^2 + hR_1^1 \\ I_O^{33} \ddot{\theta} = M_O^3 \end{cases},$$

ultima ecuație fiind ecuația din care se determină unghiul θ ca funcție de timp, din primele cinci ecuații determinându-se forțele de legătură.

Se numește *pendul fizic* un solid rigid greu mobil în jurul unei axe fixe orizontale ce nu trece prin centrul său de masă.

Reperul solidar cu rigidul este ales astfel încât centrul său de masă C să se afle pe axa Ox^1 , $OC = l$. Ecuația de mișcare a pendulului fizic este

$$I_O^{33} \ddot{\theta} = -Mgl \sin \theta,$$

lungimea pendulului simplu sincron cu pendulul fizic fiind

$$a = \frac{I_O^{33}}{Ml}.$$

$$a = \frac{I_C^{33} + Ml^2}{Ml} = l + \frac{I_C^{33}}{Ml}.$$

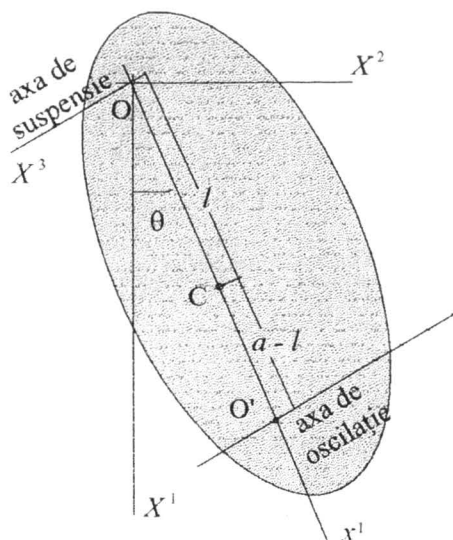
1) $a > l$

2) Axele de suspensie și de oscilație sunt

reciproce $\left(l(a-l) = \frac{I_C^{33}}{Ml} \right).$

3) Dacă într-un plan trecând prin centrul de masă C , există două axe orizontale, de o parte și de alta a lui C , inegal depărtate de C , astfel încât perioada micilor osculații în jurul celor două axe este aceeași, atunci lungimea pendulului simplu sincron cu pendulul fizic este egală cu distanța dintre cele două axe.

$$\begin{cases} l_1 + \frac{I_C^{33}}{Ml_1} = l_2 + \frac{I_C^{33}}{Ml_2} \\ l_1 \neq l_2 \end{cases} \Rightarrow l_1 l_2 = \frac{I_C^{33}}{M} \Rightarrow a_1 = a_2 = l_1 + l_2.$$



4.4.1. Să se obțină ecuația de mișcare a solidului rigid cu axă fixă utilizând teorema energiei cinetice.

Pentru a aplica teorema energiei cinetice trebuie în prealabil explicitate energia cinetică și puterea mecanică în cazul solidului rigid cu axă fixă, ținând seama că în acest caz $\mathbf{V}_O = \mathbf{0}$ și $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{1}_3$

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_O^2 + (\mathbf{V}_O, \boldsymbol{\omega}, M \mathbf{x}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} I_O^{33} \dot{\theta}^2,$$

$$P = (\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{V}_O + \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = M_O^{33} \dot{\theta}.$$

Prin urmare, întrucât $\dot{\theta} \neq 0$ pentru mișcare,

$$\frac{dT}{dt} = P \Rightarrow I_O^{33} \dot{\theta} \ddot{\theta} = M_O^{33} \dot{\theta} \Rightarrow I_O^{33} \ddot{\theta} = M_O^{33}.$$

4.4.2. Un solid rigid se rotește în jurul unei axe fixe sub acțiunea unui sistem de forțe. Cât trebuie să fie momentul resultant al sistemului de forțe date în raport cu axa fixă, încât corpul să se rotească a) uniform; b) uniform variat?

Ecuația de mișcare a solidului rigid cu axă fixă fiind

$$I_O^{33} \ddot{\theta} = M_O^3,$$

în cazurile menționate având

a) $\ddot{\theta} = 0,$

b) $\ddot{\theta} = \text{const.},$

momentul resultant al forțelor date în raport cu axa fixă trebuie să fie

a) $M_O^3 = 0,$

b) $M_O^3 = \text{const.}$

4.4.3. Să se studieze mișcarea unui solid rigid în jurul unei axe fixe, dacă momentul resultant al forțelor date este

a) $M_O^3 = M^o - \alpha \dot{\theta}^2, \quad M^o, \alpha \text{ constante pozitive};$

b) $M_O^3 = \alpha \theta - \beta \theta^3, \quad \alpha, \beta \text{ constante pozitive};$

c) $M_O^3 = \alpha \sin kt - \beta \dot{\theta}, \quad \alpha, \beta, k \text{ constante pozitive.}$

Momentul de inerție al solidului rigid în raport cu axa fixă este $I_O^{33} = I.$

a) Ecuația de mișcare

$$I \ddot{\theta} = M^o - \alpha \dot{\theta}^2$$

prin trecerea la variabila $\dot{\theta}$, rezolvată ca ecuație cu variabile separabile, cu condiții inițiale nule, conduce la

$$\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{M^o}{\alpha}} \operatorname{th} \left[\frac{\sqrt{M^o \alpha}}{I} t \right].$$

Rotația tinde să devină uniformă cu viteza unghiulară

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{M^o}{\alpha}}.$$

Integrând ecuația în $\dot{\theta}$ (tot cu variabile separabile), rezultă

$$\theta(t) = \frac{I}{\alpha} \ln \operatorname{ch} \left[\frac{\sqrt{M^o \alpha}}{I} t \right].$$

b) Din ecuația de mișcare

$$I \ddot{\theta} = \alpha \dot{\theta} - \beta \dot{\theta}^3$$

prin înmulțire cu $\dot{\theta}$, se obține integrala energiei

$$I \dot{\theta}^2 = \alpha (\theta^2 - \theta_o^2) - \frac{1}{2} \beta (\theta^4 - \theta_o^4)$$

(date inițiale $t = 0, \theta = \theta_o, \dot{\theta} = 0$) sau

$$2I \dot{\theta}^2 = (\theta^2 - \theta_o^2)[(2\alpha - \beta \theta_o^2) - \beta \theta^2]$$

În funcție de relația dintre constante și θ_o se poate integra ecuația obținută pe un interval de variație a lui θ , la stânga sau la dreapta lui θ_o , în care membrul drept al ecuației este nenegativ. Soluția acestuia gen de ecuație diferențială, care are în partea dreaptă un polinom de gradul patru, se exprimă prin funcții eliptice (v. Anexa, partea I).

c) Ecuația de mișcare se poate scrie sub forma

$$I \ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} = \alpha \sin kt$$

și integrată cu condiții inițiale nule, are soluția

$$\theta(t) = \frac{\alpha}{\beta k} - \frac{\alpha k}{\beta} \cdot \frac{1}{k^2 + \frac{\beta^2}{I^2}} \exp\left(-\frac{\beta}{I} t\right) - \frac{\alpha}{kI} \cdot \frac{1}{k^2 + \frac{\beta^2}{I^2}} \left[k \sin kt + \frac{\beta}{I} \cos kt \right].$$

4.4.4. Un pendul fizic este format din n tuburi cilindrice orizontale, de grosime neglijabilă, de mase egale M , de diametre egale D , de lungimi egale, suspendate unul sub altul, atingându-se după generatoare situate în același plan. Pendulul oscilează în jurul generatoarei orizontale AB. Se cere perioada micilor oscilații ale acestui pendul.

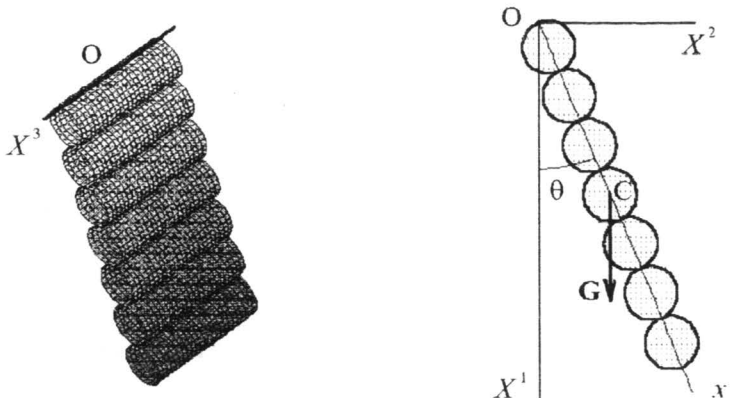


Figura 4.4.4

Momentul de inerție al unui tub în raport cu axa sa este

$$\frac{1}{2} \pi \rho_o h (R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} \pi \rho_o h (R_1^2 - R_2^2) (R_1^2 + R_2^2) \cong \frac{1}{2} M \frac{2D^2}{4} = \frac{1}{4} MD^2$$

(v.pb.2.9 pct.2)). Distanțele axelor la axa AB sunt $\frac{1}{2}D, \frac{3}{2}D, \dots, \frac{2n-1}{2}D$; prin urmare momentul de inerție al pendulului relativ la axa AB va fi, conform teoremei Steiner,

$$I = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{4}MD^2 + \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 MD^2 \right] = \frac{n(2n^2+1)}{6} MD^2.$$

Masa totală fiind nM iar distanța centrului de masă la axa fixă $a = \frac{n}{2}D$, rezultă perioada micilor oscilații ale pendulului

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{2n^2+1}{3} \cdot \frac{D}{g}}.$$

4.4.5. Un pendul fizic este format dintr-o tijă omogenă AB de lungime l_o și o placă circulară omogenă de rază r . Diametrul plăcii este în prelungirea lui AB. Masa tijei M este egală cu cea a plăcii. Axa de suspensie este orizontală și trece prin A, perpendicular pe planul plăcii. Unghiul inițial al tijei AB cu verticala descendentă este α și pendulul este lăsat liber. Să se calculeze viteza centrului de masă C al plăcii când AB este verticală.

Momentul de inerție al pendulului în raport cu axa fixă este (v.pb.2.6, 2.7 pct.3))

$$I = \left(\frac{1}{12} M l_o^2 + \frac{1}{4} M l_o^2 \right) + \left(\frac{1}{2} m r^2 + m(r+l_o)^2 \right) = \frac{1}{6} m(2l_o + 3r)^2.$$

Distanța centrului de masă al pendulului la axa fixă este

$$l = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} l_o + (l_o + r) \right] = \frac{3}{4} l_o + \frac{1}{2} r.$$

Integrala primă a energiei

$$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = 2mg \left(\frac{3}{4} l_o + \frac{1}{2} r \right) \cos \theta + \text{const.}$$

cu precizarea constantei din datele inițiale

$$\theta_o = \alpha, \dot{\theta}_o = 0$$

devine

$$I \dot{\theta}^2 = mg(3l_o + 2r)(\cos \theta - \cos \alpha);$$

se obține

$$\dot{\theta} \Big|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{mg}{I} (3l_o + 2r) (1 - \cos \alpha)}.$$

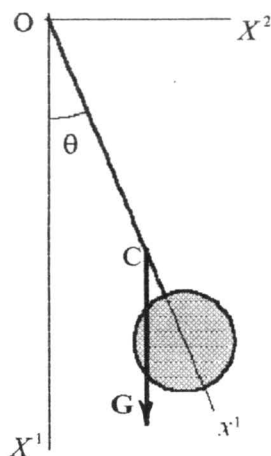


Figura 4.4.5

Deci viteza centrului de masă al plăcii, în momentul în care tija este verticală, va fi

$$V_C \Big|_{\theta=0} = (l_o + r) \dot{\theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{l_o + r}{2l_o + 3r} \sqrt{g(3l_o + 2r)(1 - \cos \alpha)}.$$

4.4.6. Un cilindru circular drept are raza r și înălțimea h . Densitatea într-un punct este proporțională cu distanța punctului la una dintre baze B.

1°. Să se găsească distanța centrului de masă la baza B.

2°. Să se calculeze momentul de inerție în raport cu un diametru D al bazei B.

3°. Cilindrul se rotește fără frecare în jurul diametrului D , presupus fix și orizontal, sub acțiunea greutății proprii. Să se calculeze perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru stabile.

Caracteristicile inerțiale ale cilindrului sunt
– masa cilindrului

$$M = \int_0^h (\pi r^2) \mu z dz = \frac{1}{2} \pi \mu r^2 h^2;$$

– poziția centrului de masă – distribuția masei având simetrie axială – precizată prin distanța la baza B (egală cu distanța la diametrul D)

$$Ml = \int_0^h (\pi r^2) \mu z^2 dz = \frac{1}{3} \pi \mu r^2 h^3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}h;$$

– momentul de inerție în raport cu diametrul D

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^r \left(\int_0^h (u^2 \cos^2 \theta + z^2) \mu z dz \right) u du \right] d\theta = \\ = \frac{1}{4} M(r^2 + 2h^2)$$

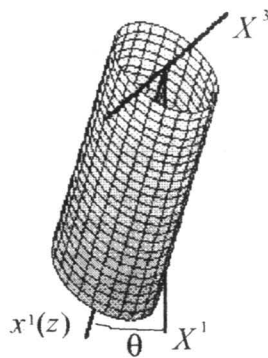


Figura 4.4.6

În consecință perioada micilor oscilații în jurul diametrului D , mișcarea având loc în vecinătatea verticalei descendente, este

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} = \pi \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{r^2 + 2h^2}{gh}}.$$

4.4.7. Un paralelipiped omogen, greu, oscilează succesiv în jurul muchiilor ce trec printr-un vârf, plasate orizontal. Cunoscând perioadele micilor oscilații corespunzătoare, să se calculeze dimensiunile paralelipipedului.

Fie $2a$, $2b$, $2c$ lungimile muchiilor și M masa paralelipipedului. Momentele de inerție în raport cu muchiile vor fi

$$I_1 = \frac{1}{3} M(b^2 + c^2) + M(b^2 + c^2) = \frac{4}{3} M(b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{4}{3} M(c^2 + a^2), I_3 = \frac{4}{3} M(a^2 + b^2).$$

Expresiile corespunzătoare ale perioadelor micilor oscilații vor fi

$$\tau_1^4 = \frac{256}{9} \cdot \frac{\pi^4}{g^2} (b^2 + c^2),$$

$$\tau_2^4 = \frac{256}{9} \cdot \frac{\pi^4}{g^2} (c^2 + a^2),$$

$$\tau_3^4 = \frac{256}{9} \cdot \frac{\pi^4}{g^2} (a^2 + b^2).$$

Notând $\lambda^2 = \frac{9}{512} \cdot \frac{g^2}{\pi^4}$ rezultă

$$\begin{cases} a^2 = \lambda^2 (-\tau_1^4 + \tau_2^4 + \tau_3^4) \\ b^2 = \lambda^2 (+\tau_1^4 - \tau_2^4 + \tau_3^4) \\ c^2 = \lambda^2 (+\tau_1^4 + \tau_2^4 - \tau_3^4) \end{cases}.$$

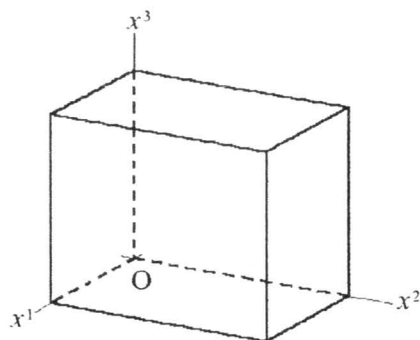


Figura 4.4.7

4.4.8. Fie un cilindru circular drept, omogen greu, de rază r și înălțime h , având masa M . Una dintre bazele cilindrului este planul ecuatorial al unei emisfere omogene grele, de rază r și de masă M' . Solidul rigid constituit din cilindru și emisferă oscilează în jurul unui diametru orizontal din planul bazei libere a cilindrului. Să se găsească lungimea pendulului simplu sincron.

Momentul de inerție al corpului în raport cu axa de suspensie rezultă din relațiile

$$I_{cil} = \frac{1}{12}M(3r^2 + h^2) + \frac{1}{4}Mh^2 = \frac{1}{12}M(3r^2 + 4h^2),$$

$$I_{ssf} = \frac{2}{5}M'r^2 + M'h^2 = M'\left(\frac{2}{5}r^2 + h^2\right),$$

$$I = \frac{1}{12}M(3r^2 + 4h^2) + M'\left(\frac{2}{5}r^2 + h^2\right).$$

Poziția centrului de masă al corpului față de axa de suspensie este dată de distanța

$$l = \frac{1}{M+M'} \left[\frac{1}{2}Mh + M'\left(\frac{3}{8}r + h\right) \right].$$

Lungimea pendulului simplu sincron va fi

$$a = \frac{I}{(M+M')l} = \frac{\frac{1}{12}M(3r^2 + 4h^2) + M'\left(\frac{2}{5}r^2 + h^2\right)}{\frac{1}{2}Mh + M'\left(\frac{3}{8}r + h\right)}.$$

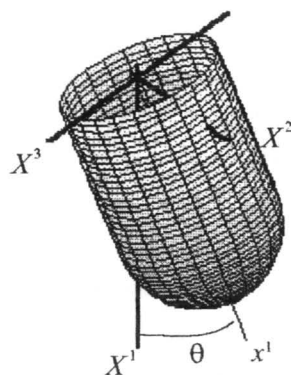


Figura 4.4.8

4.4.9. Un solid rigid omogen greu este format dintr-un con circular drept de rază r și de înălțime h și dintr-o emisferă din același material, exterioară conului, având drept cerc ecuatorial cercul de bază al conului. Se cer:

- 1°. poziția centrului de masă al corpului;
- 2°. momentele de inerție ale corpului
 - față de axa de simetrie,
 - în raport cu o axă perpendiculară pe aceasta, prin vârful conului,
 - în raport cu o generatoare;
- 3°. lungimea pendulului simplu sincron când corpul oscilează în jurul unei axe orizontale, perpendiculară pe axa de simetrie, trecând prin vârful conului;
- 4°. lungimea pendulului simplu sincron când corpul oscilează în jurul unei generatoare orizontale.

1°. Poziția centrului de masă al corpului este precizată prin distanța acestuia la vârful conului pe axa de simetrie

$$l = \frac{\frac{\pi}{4}r^2h^2 + \frac{2\pi}{3}r^3\left(\frac{3}{8}r + h\right)}{\frac{1}{3}\pi r^2h + \frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{3r^2 + 8rh + 3h^2}{4(2r + h)}$$

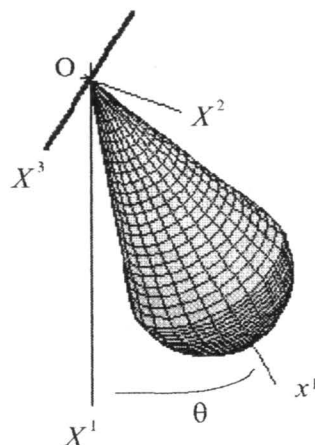


Figura 4.4.9

2°. Momentele de inerție cerute sunt:

– în raport cu axa de simetrie

$$I_{a.s.} = \pi \mu r^4 \left(\frac{1}{10} h + \frac{4}{15} r \right),$$

– în raport cu dreapta perpendiculară pe axa de simetrie, trecând prin vârful conului

$$\begin{aligned} I_{a.p.} &= \frac{1}{20} \pi \mu r^2 h (r^2 + 4h^2) + \frac{2}{15} \pi \mu r^3 (2r^2 + 5h^2) = \\ &= \frac{1}{60} \pi \mu r^2 (16r^3 + 3r^2 h + 40rh^2 + 12h^3), \end{aligned}$$

– în raport cu o generatoare

$$I_{gen} = I_{a.s.} \cos^2 \alpha + I_{a.p.} \sin^2 \alpha = \frac{I_{a.s.} h^2 + I_{a.p.} r^2}{r^2 + h^2}.$$

3°. Lungimea pendulului simplu sincron cu pendulul fizic dat, în mișcare în jurul axei perpendiculare pe axa de simetrie, trecând prin vârful conului, presupusă orizontală, este

$$a_{a.p.} = \frac{I_{a.p.}}{Ml} = \frac{1}{5} \cdot \frac{16r^3 + 3r^2 h + 40rh^2 + 12h^3}{3r^2 + 8rh + 3h^2}.$$

4°. Lungimea pendulului simplu sincron cu pendulul fizic dat, în mișcare în jurul unei generatoare, presupusă orizontală, este

$$a_{gen} = \frac{I_{gen}}{Ml \sin \alpha} = \frac{1}{5} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \cdot \frac{16r^3 + 3r^2 h + 56rh^2 + 18h^3}{3r^2 + 8rh + 3h^2}.$$

4.4.10. *Pendulul inelar* (L.Teodoriu, R.Woinaroski - 1939) este format dintr-un inel cilindric de oțel, omogen, de raze r , R , $r < R$, de masă M ; axa de suspensie este una din generatoarele cilindrului interior. Să se studieze micile oscilații ale pendulului inelar.

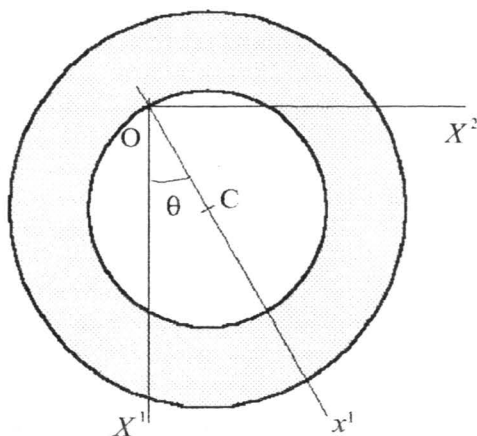


Figura 4.4.10a

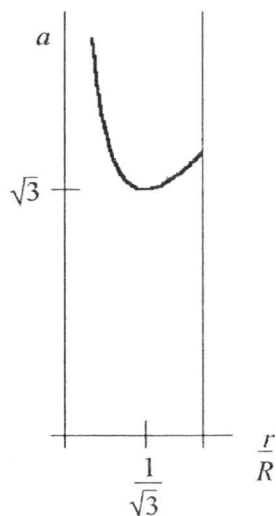


Figura 4.4.10b

Momentul de inerție al pendulului inelar în raport cu axa de suspensie fiind (v.pb.2.5 pct.7)

$$I = \frac{1}{2} M(R^2 + 3r^2),$$

lungimea pendulului simplu sincron rezultă

$$a = \frac{R^2 + 3r^2}{2r}.$$

Considerând lungimea pendulului simplu sincron ca funcție de r cu $r \in (0, R)$, variația acesteia este prezentată în figura 4.4.10b ; lungimea pendulului simplu sincron este minimă pentru $r = R/\sqrt{3}$. Deci

$$a_{\min} = R\sqrt{3}.$$

Pendulul inelar permite, prin măsurarea perioadei τ a micilor oscilații în jurul poziției stabile de echilibru $\theta = 0$, determinarea accelerației gravitaționale g cu o foarte bună precizie (dintr-o experiență foarte simplă) (v. [13]).

$$g = \frac{4\pi^2 a}{\tau^2} = 2\pi^2 \frac{R^2 + 3r^2}{r\tau^2}.$$

4.4.11. Determinarea accelerației gravitaționale cu *pendulul lui Kater*. Pendulul lui Kater este format dintr-o tijă metalică putând oscila în jurul a două axe orizontale fixate la capetele ei în O_1 și O_2 . În lungul tijei pot aluneca două perechi de cilindri, unul plin altul gol, de aceleași dimensiuni.

Fie l_1 respectiv l_2 distanțele centrului de masă al sistemului la axele prin O_1 , respectiv O_2 , $O_1 O_2 = l_1 + l_2$. Perioadele micilor oscilații în jurul celor două axe fiind τ_1 respectiv τ_2

$$\frac{g\tau_1^2}{4\pi^2} = l_1 + \frac{I_C}{Ml_1}, \quad \frac{g\tau_2^2}{4\pi^2} = l_2 + \frac{I_C}{Ml_2},$$

de unde rezultă

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1\tau_1^2 - l_2\tau_2^2}.$$

În cazul egalității perioadelor se obține [19]

$$g = 4\pi^2 \frac{l_1 + l_2}{\tau^2}.$$

Determinarea accelerației gravitaționale cu ajutorul pendulului lui Kater este mult mai puțin precisă decât cea cu ajutorul pendulului inelar (v.[13] și pb.4.4.10).

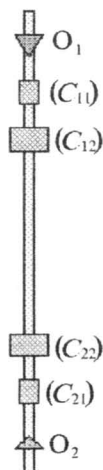


Figura 4.4.11

4.4.12. *Pendulul lui Mach* este un pendul a cărui axă de suspenție poate fi înclinată cu unghiul α , $0 < \alpha < \pi/2$, față de planul orizontal. Planul de oscilație al centrului de masă C este normal la axa AB și o intersectează în O . În poziție de echilibru, planul format de AB și C este vertical. În cursul oscilațiilor pendulului, sub acțiunea greutății, planul ABC oscilează în jurul acestui plan vertical. Să se studieze mișcarea pendulului.

Ecuția de mișcare a pendulului lui Mach este

$$I\ddot{\theta} = -Mgl \cos \alpha \sin \theta;$$

lungimea pendulului simplu sincron este

$$a = \frac{I}{Ml \cos \alpha},$$

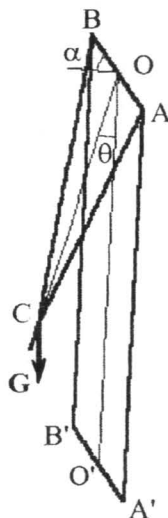


Figura 4.4.12

iar perioada micilor oscilații în jurul poziției stabile de echilibru $\theta = 0$

$$\tau_\alpha = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Ml \cos \alpha}},$$

de unde

$$\cos^2 \alpha = \frac{\tau_o^2}{\tau_\alpha^2},$$

relație care se poate verifica experimental. Modelarea nu ține seama de frecare, aceasta fiind cu atât mai evidentă cu cât unghiul α este mai mare (v.[13]).

4.4.13. *Pendulul de torsiune Weber-Gauss* este un corp solid rigid greu legat printr-un fir inextensibil de un punct fix O. Sistemul rigid este format dintr-un cilindru omogen de masă M , rază R și înălțime h , la care este atașată o tijă subțire de masă m' și lungime $2l$, la capetele acesteia putându-se fixa două bile sferice egale de masă m și rază r . Să se studieze oscilațiile pendulului în jurul firului (vertical), considerând, pentru mici oscilații, momentul de torsiune proporțional cu unghiul θ .

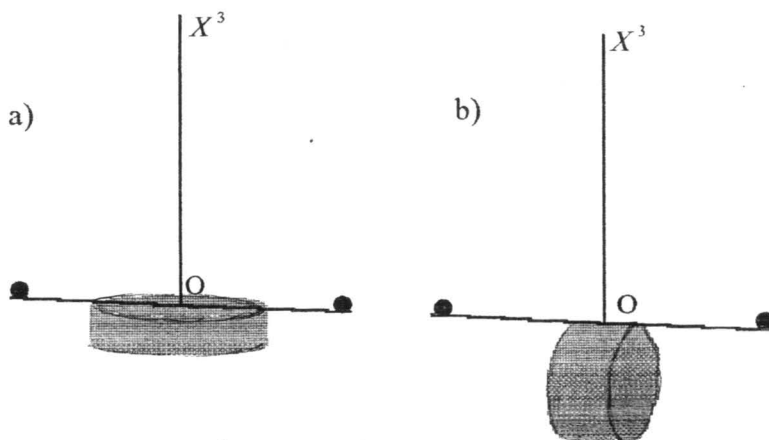


Figura 4.4.13

Ecuatia de mișcare a sistemului în jurul axei verticale OX^3 , presupusă fixă, este

$$I\ddot{\theta} = -C\theta, \quad C > 0$$

(momentul forței de greutate față de axa verticală este nul), I fiind momentul de inerție al sistemului în raport cu axa OX^3 . Din ecuația de mișcare, cu o alegere convenabilă a momentului inițial, rezultă

$$\theta = \theta_o \cos\left(\sqrt{\frac{C}{I}} t\right),$$

perioada oscilației fiind $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}$.

Momentele de inerție în raport cu axa fixă sunt

– pentru cilindru (v.pb.2.9 pct. 2))

a) cu axa de simetrie în lungul firului vertical

$$I_{cil} = \frac{1}{2}MR^2;$$

b) cu o rază din planul median în lungul firului vertical

$$I_{cil} = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2) ;$$

– pentru tijă

$$I_{tija} = \frac{1}{3}m'l^2 ;$$

– pentru o bilă

$$I_{bila} = \frac{2}{5}mr^2 + ml^2 .$$

Momentul de inerție total este

– fără bile

$$I = I_{cil} + I_{tija} ;$$

– cu bile

$$I' = I_{cil} + I_{tija} + 2I_{bila} .$$

Notând cu τ respectiv τ' perioadele corespunzătoare, se poate obține experimental constanta de torsiune C

$$C = 4\pi^2 \frac{I}{\tau^2}, C = 4\pi^2 \frac{I'}{\tau'^2} ;$$

teoretic aceste valori trebuie să fie egale, ele caracterizând firul, nedepinzând de corp.

Admițând că C este același, se pot determina experimental momente de inerție și constanta de torsiune (v.[13]).

4.4.14. O placă dreptunghiulară ABA'B', omogenă de masă M și laturi a, b , se rotește în jurul axei verticale AB, viteza unghiulară inițială fiind ω_0 . Fiecare punct al plăcii întâmpină o rezistență din partea mediului, proporțională cu pătratul vitezei sale și de direcție perpendiculară pe placă, factor de proporționalitate $k > 0$. După cât timp viteza unghiulară a plăcii se înjumătățește?

Planul plăcii fiind Ax^1x^3 , momentul resultant al forței de rezistență este

$$\mathbf{M}_A = \int_0^a \int_0^b (x^1 \mathbf{t}_1 + x^3 \mathbf{t}_3) \times \left[-k\mu_o (\dot{\theta} x^1)^2 \mathbf{t}_2 \right] dx^1 dx^3$$

de unde

$$M_{A3} = -\frac{1}{4}kM\dot{\theta}^2 a^3 .$$

Forța de greutate nu are nici o contribuție la momentul în raport cu axa Ax^3 .

Momentul de inerție al plăcii în raport cu axa Ax^3 este

$$I = \frac{1}{3}Ma^2 .$$

Ecuția de mișcare

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{4}ka\dot{\theta}^2$$

prin integrare dă

$$\frac{1}{\dot{\theta}} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{3}{4}kat .$$

Deci timpul cerut va fi

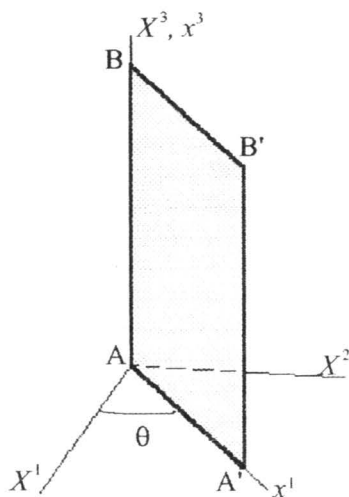


Figura 4.4.14

$$t_* = \frac{4}{3ka\omega_o}.$$

4.4.15. Să se studieze, în funcție condițiile inițiale, tipurile "teoretice" de mișcări ale unui pendul fizic.

Fie M – masa pendulului, I – momentul de inerție în raport cu axa de suspensie, l – distanța centrului de masă C la această axă. Din teorema energiei cinetice se obține integrala primă

$$I(\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_o^2) = 2Mgl(\cos\theta - \cos\theta_o)$$

sau

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{Mgl}{I} \left[\cos\theta - \left(\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 \right) \right].$$

$$\text{Totdeauna } \cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 \leq 1.$$

Sunt posibile trei situații:

- i) $\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 > -1;$
- ii) $\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 = -1;$
- iii) $\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 < -1.$

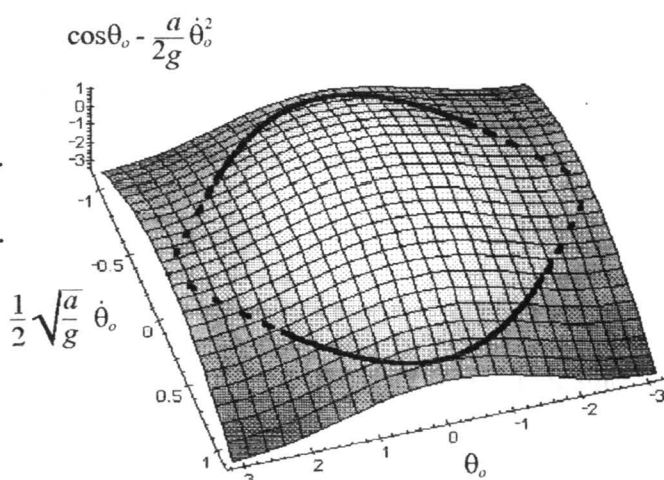


Figura 4.4.15

În diagrama din figura 4.4.15 este prezentată suprafața

$$\varphi\left(\theta_o, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\dot{\theta}_o\right) = \cos\theta_o - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\dot{\theta}_o\right)^2$$

și curba închisă situată pe această suprafață

$$\cos\theta_o - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\dot{\theta}_o\right)^2 = -1.$$

i) *Mișcare oscilatorie*

În acest caz există notând

$$\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 = \cos\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi,$$

ecuația de mișcare devine

$$\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{a}(\cos\theta - \cos\alpha), \quad a = \frac{I}{Ml}.$$

Punând

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

se obține ecuația diferențială

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\varepsilon\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Fie $\dot{\theta}_o > 0$. În ecuația de mișcare se ia semnul $\varepsilon = +1$ și rezultă că θ va crește până la valoarea α când $\dot{\theta}$ se anulează. Luând apoi $\varepsilon = -1$ în fața radicalului, se vede că θ va descreește până la valoarea $-\alpha$, când iarăși $\dot{\theta}$ se anulează etc.

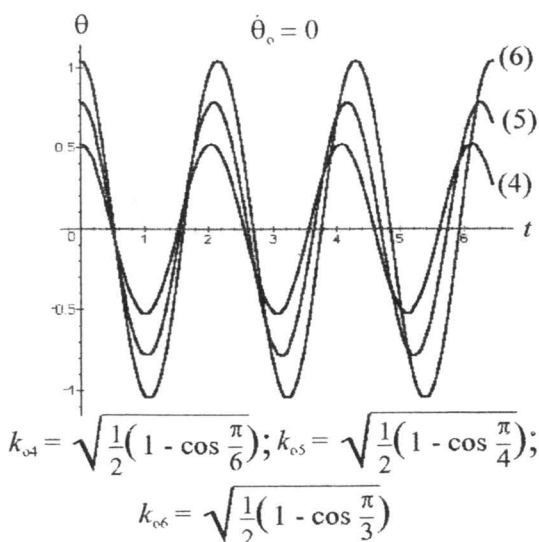
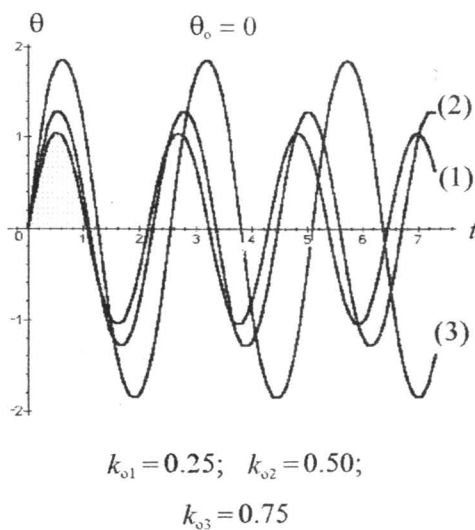


Figura 4.4.15 i 1

În figura 4.4.15 i1 sunt prezentate exemple de mișcări oscilatorii pentru două cazuri de condiții inițiale particulare: $\theta_0 = 0, \dot{\theta}_0 \neq 0$ și respectiv $\theta_0 \neq 0, \dot{\theta}_0 = 0$.

Intervalul de timp după care θ și $\dot{\theta}$ revin la aceeași valoare este *perioada* de oscilație

$$\tau_o = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{-1/2} d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Notând

$$\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\alpha}{2}$$

se exprimă τ_o sub forma integralei eliptice

$$(*) \quad \tau_o = 4 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

(forma normală Legendre), unde parametrul

$$k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} < 1$$

depinde de condițiile inițiale.

Pentru calculul numeric al lui τ_o se poate folosi dezvoltarea în serie

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 u^2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 u^2 + \frac{1.3}{2.4} k^4 u^4 + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} k^{2n} u^{2n} + \dots$$

valabilă pentru $k^2 u^2 < 1$, urmată de integrarea termen cu termen a seriei uniform convergente. Dar

$$\int_0^1 \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

și prin urmare

$$(**) \quad \tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left[1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \dots + \left(\frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

În cazul oscilațiilor mici

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$$

deci

$$(***) \quad \tau_o \approx 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\alpha^2\right).$$

Dacă și α^2 este neglijabil, atunci se regăsește formula lui Galileu

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Aprecierea "aproximației" perioadei poate fi urmărită în figura 4.4.15 i 2. Se observă o bună coincidență pentru valori mici ale lui α și diferențe din ce în ce mai mari pe măsură ce α crește.

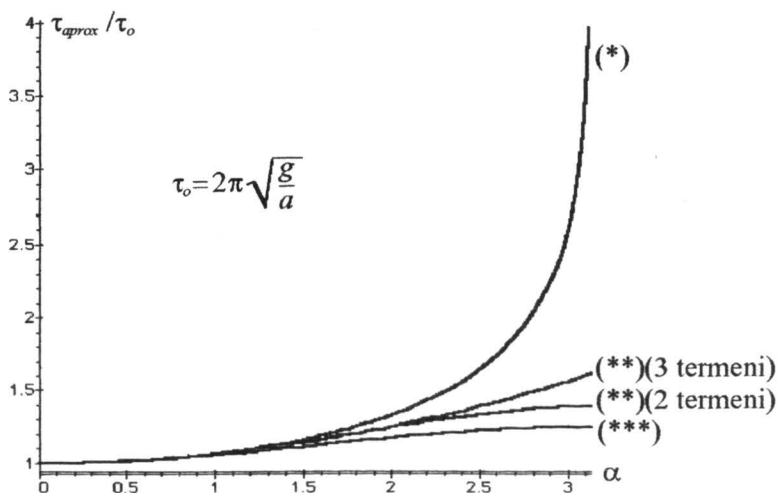


Figura 4.4.15 i 2

Observație: Acest caz presupune o limitare superioară a vitezei

$$\dot{\theta}_o^2 < 2\frac{g}{a}(\cos\theta_o + 1).$$

ii) Mișcare de rotație

În acest caz

$$\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 < -1$$

și solidul rigid are o mișcare de rotație în același sens, impus de semnul lui $\dot{\theta}_o$. Ecuația diferențială care descrie mișcarea este

$$\dot{\theta} = \epsilon \sqrt{2\frac{g}{a} \cdot \frac{1}{k_1^2} \left(1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)}$$

unde

$$k_1^2 = \frac{1}{1 - \cos\theta_o + \frac{a}{2g}\dot{\theta}_o^2} < 1.$$

Intervalul de timp în care solidul plecat din poziția θ_o revine în

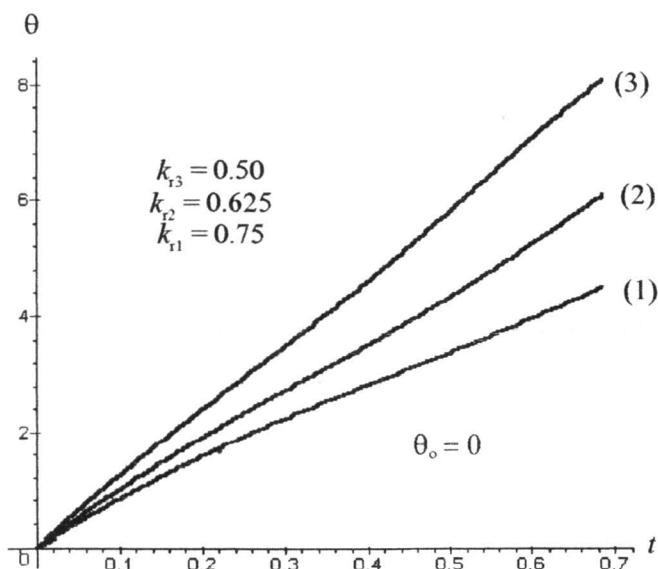


Figura 4.4.15 ii

aceeași poziție cu $\theta = \theta_o + 2\pi$ este dat de

$$\tau_o = \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{a}\left(1 - \cos\theta_o + \frac{a}{2g}\dot{\theta}_o^2\right)}} \int_{\theta_o}^{\theta_o+2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\frac{g}{a}\left(1 - \cos\theta_o + \frac{a}{2g}\dot{\theta}_o^2\right)}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\theta_o + \varphi}{2}}}.$$

iii) Mișcare asimptotică

Pentru realizarea acestui caz, pur teoretic, ar trebui ca

$$\cos\theta_o - \frac{I}{2Mgl}\dot{\theta}_o^2 = -1$$

În această ipoteză, ecuația de mișcare devine

$$\dot{\theta} = \varepsilon \sqrt{2\frac{g}{a}(\cos\theta + 1)}$$

și prin integrare, după separarea variabilelor, se obține

$$t = \varepsilon \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{d(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right]_{\theta_o}^{\theta}$$

Solidul rigid se mișcă în sensul în care $|\theta|$ crește; el ajunge în punctul $|\theta| = \pi$ într-un timp infinit.

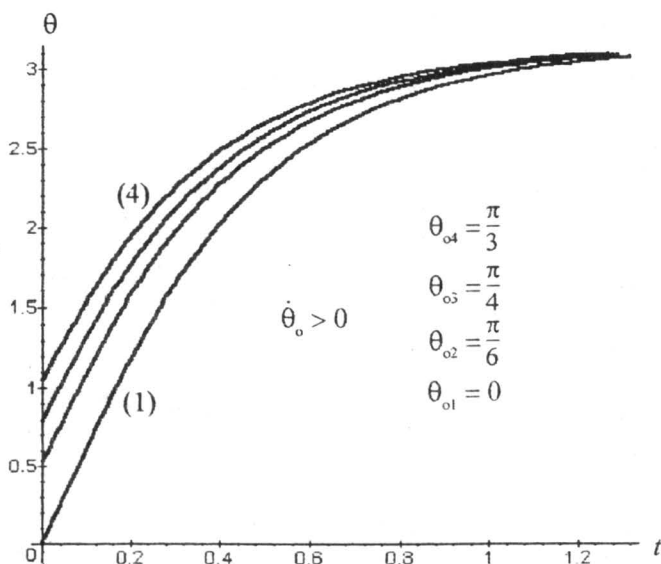


Figura 4.4.15 iii

Pentru reprezentările grafice și calculele implicate în exemplele de mai sus și în analiza lor s-a utilizat următorul program:

```
> with(plots): with(DEtools):
> g:=9.8: a:=1: p:=sqrt(4*g*a): fct:=4*sqrt(a/g):
```

Condiția de clasificare a tipului de mișcare

```
> phi:=proc(u,v) cos(u)-2*v^2 end:
> supr:=plot3d([u,v,phi(u,v)],u=-Pi..Pi,v=-1..1,axes=framed):
> c1:=spacecurve([u,sqrt((1+cos(u))/2),-1],u=-Pi..Pi,thickness=3,numpoints=200,color=black):
> c2:=spacecurve([u,-sqrt((1+cos(u))/2),-1],u=-Pi..Pi,thickness=3,numpoints=200,color=black):
> display({supr,c1,c2});
```

Cazul mișcării oscilatorii pronind din poziția de echilibru

```
> ko1:=0.25: ko2:=0.5: ko3:=0.75: pero1:=evalf(fct*LegendreKc(ko1)); pero2:=evalf(fct*LegendreKc(ko2)); pero3:=evalf(fct*LegendreKc(ko3)); t1:=3*pero3:
```

$pero1 := 2.039603495$

$pero2 := 2.153972792$

$pero3 := 2.441773174$

```
> DEplot(diff(u(t),t$2)+g*sin(u(t))/a=0,[t,u],0..t1,[[0,0,0.5*p],[0,0,0.6*p],[0,0,0.8*p]],stepsize=per
> o3/40);
```

Cazul miscarii oscilatorii pentru viteza initiala nula
 > ko4:=sqrt((1-cos(Pi/6))/2); ko5:=sqrt((1-cos(Pi/4))/2); ko6:=sqrt((1-cos(Pi/3))/2); pero4:=evalf(
 > fct*LegendreKc(ko4)); pero5:=evalf(fct*LegendreKc(ko5)); pero6:=evalf(fct*LegendreKc(ko6))
 > ; t2:=3*pero6:

pero4 := 2.042030945

pero5 := 2.087320017

pero6 := 2.153972792

> DEplot(diff(u(t),t\$2)+g*sin(u(t))/a=0,[t,u],0..t2,[[0,Pi/6,0],[0,Pi/4,0],[0,Pi/3,0]],stepsize=pero6/4
 > 0);

Calculul aproximativ si exact al perioadei

> fo:=2*Pi*sqrt(a/g):
 > f1:=proc(x) (1+x^2/16) end:
 > f2:=proc(x) (1+sin(x/2)^2/4) end:
 > f3:=proc(x) (1+sin(x/2)^2/4+9*sin(x/2)^4/64) end:
 > f4:=proc(x) 2/Pi*LegendreKc(sin(x/2)) end:
 > plot({f1(x),f2(x),f3(x),f4(x)},x=0..Pi,color=black);

Cazul miscarii asimptotice

> fa:=proc(u,u0) fct/4*ln(tan((u+Pi)/4)/tan((u0+Pi)/4)) end:
 > ma1:=plot([fa(u,0),u,u=0..Pi]): ma2:=plot([fa(u,Pi/6),u,u=Pi/6..Pi]): ma3:=plot([fa(u,Pi/4),u,u=P
 > i/4..Pi]): ma4:=plot([fa(u,Pi/3),u,u=Pi/3..Pi]):
 > display({ma1,ma2,ma3,ma4});

Cazul miscarii de rotatie pornind din pozitia de echilibru

> kr1:=0.75: kr2:=0.625: kr3:=0.5: perr1:=evalf(2*a*kr1/p*LegendreKc(kr1)); perr2:=evalf(2*a*kr
 > 2/p*LegendreKc(kr2)); perr3:=evalf(2*a*kr3/p*LegendreKc(kr3)); t3:=1.5*perr1:

perr1 := .4578324700

perr2 := .3535928585

perr3 := .2692465990

> DEplot(diff(u(t),t\$2)+g*sin(u(t))/a=0,[t,u],0..t3,[[0,0,p/kr1],[0,0,p/kr2],[0,0,p/kr3]],stepsize=perr
 > 3/50);

§4.5. Dinamica solidului rigid cu punct fix

Fie $OX^1X^2X^3$ un reper inerțial cu originea în punctul fix O al solidului rigid și $Ox^1x^2x^3$ reperul solidar cu rigidul, determinat de axele principale de inerție prin O . Având în vedere legătura impusă solidului rigid $\mathbf{X}_O = \mathbf{o}$, poziția acestuia este precizată numai prin unghiurile Euler ψ, θ, φ . Solicitarea exercitată asupra solidului rigid este caracterizată prin rezultanta $\mathbf{F}$ și momentul resultant $\mathbf{M}_O$, iar forța de legătură, aplicată în O prin $\mathbf{R}$.

Principiul de bilanț al impulsului

$$M[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_C)] = \mathbf{F} + \mathbf{R}$$

va permite determinarea forței de legătură de îndată ce se va cunoaște mișcarea solidului rigid în jurul punctului O , adică vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ și unghiurile lui Euler ce dau poziția relativă a reperelor $OX^1X^2X^3$ și $Ox^1x^2x^3$, $\mathbf{x}_C$ fiind vectorul de poziție al centrului de masă al solidului. Viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ și unghiurile Euler se determină din principiul de bilanț al momentului cinetic în raport cu punctul O (ecuațiile lui Euler)

$$\mathbf{I}_O \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O$$

sau

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}^1 + (I_3 - I_2) \omega^3 \omega^2 = M_{O1} \\ I_2 \dot{\omega}^2 + (I_1 - I_3) \omega^1 \omega^3 = M_{O2} \\ I_3 \dot{\omega}^3 + (I_2 - I_1) \omega^2 \omega^1 = M_{O3} \end{cases}$$

unde $\mathbf{I}_O$ este tensorul de inerție în raport cu punctul O , iar relația de legătură între viteza unghiulară și unghiurile lui Euler prin

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{I}_3 + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\varphi} \mathbf{t}_3 = \omega^k \mathbf{t}_k$$

sau

$$\begin{cases} \omega^1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega^2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega^3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

Ecuațiile de mișcare în cazul solidului rigid greu cu punct fix pot fi integrate prin cuadraturi, în condiții inițiale arbitrare, numai dacă se încadrează în cazurile de integrabilitate Euler-Poinsot, Lagrange-Poisson sau Kovalevskia. În acest caz ca și în altele se urmărește determinarea de integrale prime ale problemei care să conducă la reducerea numărului de ecuații diferențiale ce trebuie integrate.

4.5.1. O placă omogenă, grea, rezultând prin extragerea dintr-un cilindru cu secțiune transversală o elipsă de semiaxe a, b , a două conuri identice, simetrice, cu vârfurile în O , cu înălțime h , $a > b > h$, este mobilă în jurul centrului său de masă fix O . Fie A, B extremitățile semiaxelor în plan median. La momentul inițial viteza punctului A este paralelă cu OB și egală cu $\lambda \sqrt{a^2 - b^2}$, iar componenta după normala la planul plăcii a vitezei punctului B este $\lambda \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$, $\lambda > 0$ constant (figura 4.5.1a). Să se studieze mișcarea plăcii.

Problema se încadrează în cazul Euler-Poinsot, momentul cinetic al forței de greutate aplicată în punctul fix fiind nul

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OO} \times M \mathbf{g} = \mathbf{o}.$$

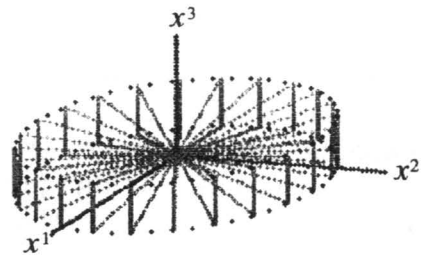
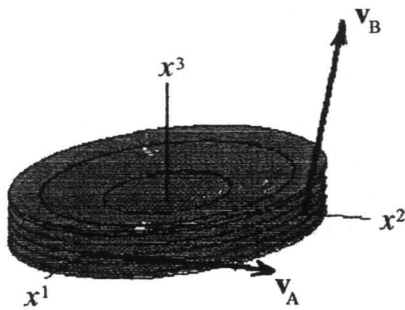


Figura 4.5.1a

Axele principale de inerție prin O coincid cu axele elipsei și paralela la generatoarea plăcii; momentele principale de inerție sunt

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \iiint_{D_0} \rho_0 [(x^2)^2 + (x^3)^2] dx^1 dx^2 dx^3 = \\
 &= \rho_0 ab \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{-uh/2}^{uh/2} (b^2 u^2 \sin^2 v + z^2) dz \right) dv \right] u du = M \frac{6b^2 + h^2}{20} \\
 I_2 &= M \frac{6a^2 + h^2}{20}, \quad I_3 = M \frac{6(a^2 + b^2)}{20}; \quad I_3 > I_2 > I_1, \\
 M &= \iiint_{D_0} \rho_0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{2}{3} \pi a b h \rho_0,
 \end{aligned}$$

M – masa plăcii.

Având în vedere că vitezele punctelor A și B sunt

$$\mathbf{V}_A = \boldsymbol{\omega} \times a \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{V}_B = \boldsymbol{\omega} \times b \mathbf{t}_2,$$

rezultă condițiile inițiale

$$\omega_o^1 = \lambda \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad \omega_o^2 = 0, \quad \omega_o^3 = \lambda \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Observație: Dacă s-ar fi dat viteza punctului B la momentul inițial și nu numai componenta normală la plan, s-ar fi putut ajunge la contradicții în ceea ce privește componenta ω_o^2 .

Sistemul de ecuații Euler

$$\begin{cases} (6b^2 + h^2)\dot{\omega}^1 + (6b^2 - h^2)\omega^2\omega^3 = 0 \\ (6a^2 + h^2)\dot{\omega}^2 - (6a^2 - h^2)\omega^3\omega^1 = 0 \\ (a^2 + b^2)\dot{\omega}^3 + (a^2 - b^2)\omega^1\omega^2 = 0 \end{cases}$$

admite următoarele integrale prime:

– conservarea momentului cinetic $\mathbf{K}_O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

cu cele două aspecte

– conservarea mărimii momentului cinetic $\|\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}\| = \delta \mu$, adică

$$(6b^2 + h^2)^2 (\omega^1)^2 + (6a^2 + h^2)^2 (\omega^2)^2 + 36(a^2 + b^2)^2 (\omega^3)^2 = \delta^2 \mu^2,$$

– conservarea direcției momentului cinetic, direcția acestuia fiind $\mathbf{I}_3$, deci

$$\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \delta \mu \mathbf{I}_3;$$

– conservarea energiei cinetice $T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}$

$$\frac{dT}{dt} = \omega \cdot \mathbf{M}_O \Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \omega \cdot \mathbf{I}_O \omega = \text{const.}$$

adică

$$(6b^2 + h^2)(\omega^1)^2 + (6a^2 + h^2)(\omega^2)^2 + 6(a^2 + b^2)(\omega^3)^2 = \delta\mu^2;$$

$$\delta^2\mu^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \lambda^2 (36a^4 + 12b^2h^2 + h^4), \quad \delta\mu^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \lambda^2 (6a^2 + h^2).$$

Din integralele prime se obține prin explicitare în raport cu ω^1

$$\begin{cases} (\omega^2)^2 = \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{6b^2 + h^2}{6b^2 - h^2} \left[\lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} - (\omega^1)^2 \right], \\ (\omega^3)^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{6b^2 + h^2}{6b^2 - h^2} \left[(\omega^1)^2 - \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{2h^2}{6b^2 + h^2} \right], \end{cases}$$

astfel încât determinarea componentei ω^1 a vectorului viteză unghiulară revine la integrarea ecuației diferențiale

$$\dot{\omega}^1 + \sqrt{\frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} \sqrt{[\alpha_1^2 - (\omega^1)^2][(\omega^1)^2 - \beta_1^2]} = 0,$$

$$\alpha_1^2 = \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2}, \quad \beta_1^2 = \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{2h^2}{6b^2 + h^2}, \quad \alpha_1^2 > \beta_1^2.$$

Integrarea ecuației diferențiale se realizează în intervalul în care are sens radicalul și în care se găsește valoarea inițială $\omega_0^1 = \alpha_1 > 0$; conform tabelului de variație

ω^1	$-\infty$	$-\alpha_1$	$-\beta_1$	0	β_1	α_1	$+\infty$
$[\alpha_1^2 - (\omega^1)^2][(\omega^1)^2 - \beta_1^2]$	-	-	0	+	+	+	+
$\alpha_2^2 - (\omega^2)^2$	+	+	+	+	0	+	+
$[\alpha_2^2 - (\omega^2)^2][\beta_2^2 - (\omega^2)^2]$	-	-	0	+	0	+	-

[←]

[→]

acest interval este $[\beta_1, \alpha_1]$. ω^1 va descresce de la valoarea inițială până la valoarea β_1 , după aceea va crește până la valoarea α_1 și apoi variația se va repeta. Corelația între intervalul de variație și valoarea inițială decide semnul "+" din fața radicalului. Soluția ecuației diferențiale se exprimă cu ajutorul funcției eliptice de speța întâi

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha_1} F(\arcsin \xi_1, k_1) = \sqrt{\frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} t \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\tau_1, \\ \frac{1}{\alpha_1} \left\{ F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) - F(\arcsin \xi_1, k_1) \right\} = \sqrt{\frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}} \left(t - \frac{1}{2}\tau_1 \right) \quad \text{pentru } \frac{1}{2}\tau_1 \leq t \leq \tau_1 \end{cases}$$

$$k_1^2 = \frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{\alpha_1^2} = \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} < 1, \quad \tau_1 = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{6a^2 + h^2}{6a^2 - h^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right), \quad \xi_1 = \frac{\alpha_1}{\omega^1} \frac{\sqrt{(\omega^1)^2 - \beta_1^2}}{\sqrt{\alpha_1^2 - \beta_1^2}}.$$

Componenta ω^1 este funcție periodică cu perioada τ_1 .

Din integralele prime se obține prin explicitare în raport cu ω^2

$$\begin{cases} (\omega^1)^2 = \frac{6a^2 + h^2}{6a^2 - h^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \left[\lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{6b^2 + h^2}{6b^2 - h^2} - (\omega^2)^2 \right], \\ (\omega^3)^2 = \frac{6a^2 + h^2}{6a^2 - h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left[\lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} - (\omega^2)^2 \right], \end{cases}$$

astfel încât determinarea componentei ω^2 a vectorului viteză unghiulară revine la integrarea ecuației diferențiale

$$\dot{\omega}^2 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2}} \sqrt{[\alpha_2^2 - (\omega^2)^2][\beta_2^2 - (\omega^2)^2]}$$

$$\alpha_2^2 = \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{6b^2 + h^2}{6b^2 - h^2}, \beta_2^2 = \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2}, \alpha_2^2 > \beta_2^2.$$

Integrarea ecuației diferențiale se realizează în intervalul în care are sens radicalul și în care se găsește valoarea inițială $\omega_0^2 = 0$; conform tabelului de variație

ω^2	$-\infty$	$-\alpha_2$	$-\beta_2$	0	β_2	α_2	$+\infty$						
$\beta_2^2 - (\omega^2)^2$	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-			
$\beta_3^2 + (\omega^3)^2$	-	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-	
$\alpha_3^2 - (\omega^3)^2$	+	+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	+	+
					[			→	]				
					[	←	←	←	]				
					[	→			]				

acest interval este $[-\beta_2, \beta_2]$. ω^2 va crește de la valoarea inițială până la valoarea β_2 , după aceea va descreește până la valoarea $-\beta_2$ în continuare va crește de la valoarea $-\beta_2$ până la $\omega_0^2 = 0$ și apoi variația se va repeta. În fața radicalului s-a ales semnul "+" întrucât ω_0^1 și ω_0^3 au același semn. Soluția ecuației diferențiale de mai sus se va exprima și ea cu ajutorul funcțiilor eliptice de speța întâi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\alpha_2} F(\arcsin \xi_2, k_2) = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2}} t \text{ pentru } 0 \leq t \leq \frac{\tau_2}{4}, \\ \frac{1}{\alpha_2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right) - F(\arcsin \xi_2, k_2) \right] = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2}} \left(t - \frac{\tau_2}{4}\right) \text{ pentru } \frac{\tau_2}{4} \leq t \leq \frac{\tau_2}{2}, \\ -\frac{1}{\alpha_2} F(\arcsin \xi_2, k_2) = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2}} \left(t - \frac{\tau_2}{2}\right) \text{ pentru } \frac{\tau_2}{2} \leq t \leq \frac{3\tau_2}{4}, \\ -\frac{1}{\alpha_2} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right) - F(\arcsin \xi_2, k_2) \right] = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2}} \left(t - \frac{3\tau_2}{4}\right) \text{ pentru } \frac{3\tau_2}{4} \leq t \leq \tau_2, \end{array} \right.$$

$$k_2^2 = \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} = \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} < 1, \tau_2 = \frac{4}{\lambda} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{6a^2 + h^2}{6a^2 - h^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right), \xi_2 = \frac{\omega^2}{\beta_2}.$$

Componenta ω^2 este funcție periodică cu perioada τ_2 .

Din integralele prime se obține prin explicitare în raport cu ω^3

$$\left\{ \begin{array}{l} (\omega^1)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \left[\lambda^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{2h^2}{6b^2 - h^2} + (\omega^3)^2 \right], \\ (\omega^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \left[\lambda^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} - (\omega^3)^2 \right], \end{array} \right.$$

astfel încât determinarea componentei ω^3 a vectorului viteză unghiulară revine la integrarea ecuației diferențiale

$$\dot{\omega}^3 + \sqrt{\frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2}} \sqrt{[\alpha_3^2 - (\omega^3)^2][\beta_3^2 + (\omega^3)^2]} = 0,$$

$$\alpha_3^2 = \lambda^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \beta_3^2 = \lambda^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{2h^2}{6b^2 - h^2}, \alpha_3^2 > \beta_3^2.$$

Integrarea ecuației diferențiale se realizează în intervalul în care are sens radicalul și în care se găsește valoarea inițială $\omega_0^3 = \alpha_3$; conform tabelului de variație

ω^3	$-\infty$	$-\alpha_3$	$-\beta_3$	0	β_3	α_3	$+\infty$
$[\alpha_3^2 - (\omega^3)^2][\beta_3^2 + (\omega^3)^2]$	-	-	0	+	+	+	+
$u_o = u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	+	+	+	+	+	+	+
ω_o^2	-	-	0	+	+	+	+
			[	←	←	←	]
			[	→	→	→	]

acest interval este $[-\alpha_3, \alpha_3]$. ω^3 va descreește de la valoarea inițială până la valoarea $-\alpha_3$, după aceea va crește până la valoarea α_3 și apoi variația se va repeta. Corelația între intervalul de variație și valoarea inițială decide semnul "+" din fața radicalului. Soluția ecuației diferențiale de mai sus se va exprima și ea cu ajutorul funcțiilor eliptice de speța întâi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k_3\right) - F(\arcsin \xi_3, k_3) \right] &= \sqrt{\frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2}} t \quad \text{pentru } 0 \leq t \leq \frac{\tau_3}{4} \\ -\frac{1}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}} F(\arcsin \xi_3, k_3) &= \sqrt{\frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2}} \left(t - \frac{\tau_3}{4} \right) \quad \text{pentru } \frac{\tau_3}{4} \leq t \leq \frac{\tau_3}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}} \left[F\left(\frac{\pi}{2}, k_3\right) - F(\arcsin \xi_3) \right] &= \sqrt{\frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2}} \left(t - \frac{\tau_3}{2} \right) \quad \text{pentru } \frac{\tau_3}{2} \leq t \leq \frac{3\tau_3}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}} F(\arcsin \xi_3, k_3) &= \sqrt{\frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2}} \left(t - \frac{3\tau_3}{4} \right) \quad \text{pentru } \frac{3\tau_3}{4} \leq t \leq \tau_3 \\ k_3^2 = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_3^2 + \beta_3^2} = \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} < 1, \tau_3 = \frac{4}{\lambda} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{6a^2 + h^2}{6a^2 - h^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k_3\right), \xi_3 &= \frac{\omega^3 \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}}{\alpha_3 \sqrt{\beta_3^2 + (\omega^3)^2}}. \end{aligned}$$

Componenta ω^3 este funcție periodică cu perioada τ_3 .

Comparând caracteristicile funcțiilor eliptice de speța întâi utilizate în exprimarea variației în timp a componentelor vitezei unghiulare ω , se constată că

$$k_1 = k_2 = k_3 = k = \sqrt{\frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2}},$$

iar perioada este unică

$$\tau = \frac{4}{\lambda} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{6a^2 + h^2}{6a^2 - h^2}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Evident, era suficient să se considere problema integrării ecuației diferențiale pentru o singură componentă și să se obțină celelalte componente din ecuațiile algebrice care au rezultat din integralele prime. Prin explicitările realizate pentru fiecare componentă, au reieșit proprietățile semnalate mai sus. Pentru formulele utilizate în explicitările soluțiilor ecuațiilor diferențiale poate fi consultată anexa la [25].

În figura 4.5.1b este prezentată variația componentelor vitezei unghiulare de-a lungul unei perioade. Ecuațiile obținute pentru fiecare componentă în parte nu se pot integra numeric având în vedere integrarea pe subintervale de timp, cel puțin pentru unele dintre ele plecând din puncte singulare. De aceea pentru a obține această reprezentare se pot integra

ecuațiile diferențiale de ordinul al doilea pentru fiecare componentă cu condițiile inițiale corespunzătoare (condițiile inițiale pentru ω și din ecuațiile Euler pentru $\dot{\omega}$)

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}^1 &= \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left[(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \omega^1 - 2(\omega^1)^3 \right], \quad \omega_o^1 = \lambda \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \quad \dot{\omega}_o^1 = 0, \\ \ddot{\omega}^2 &= \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left[2(\omega^2)^3 - (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \omega^2 \right], \quad \omega_o^2 = 0, \quad \dot{\omega}_o^2 = \lambda^2 \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \cdot \frac{\sqrt{a^4 - b^4}}{a^2}, \\ \ddot{\omega}^3 &= \frac{6b^2 - h^2}{6b^2 + h^2} \cdot \frac{6a^2 - h^2}{6a^2 + h^2} \left[(\alpha_3^2 - \beta_3^2) \omega^3 - 2(\omega^3)^3 \right], \quad \omega_o^3 = \lambda \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \dot{\omega}_o^3 = 0,\end{aligned}$$

sau sistemul de ecuații Euler cu condițiile inițiale corespunzătoare.

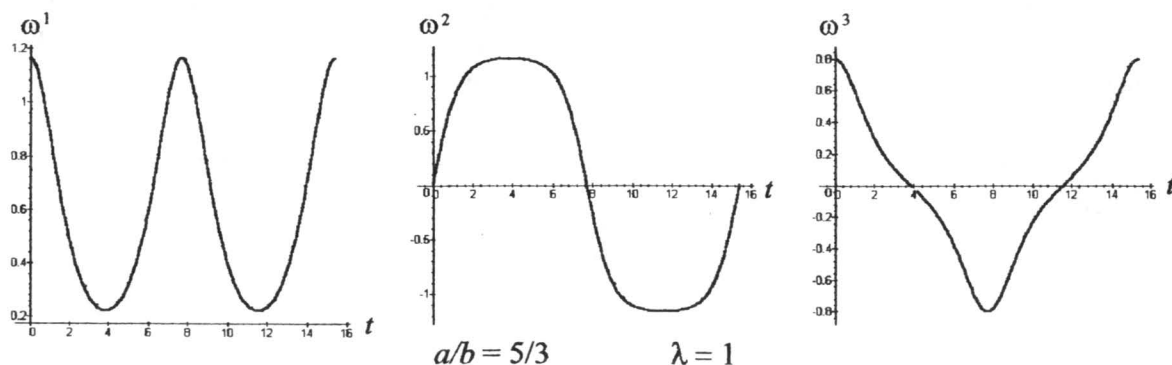


Figura 4.5.1b

În figura 4.5.1c este sugerată variația, în același interval de timp, a vectorului viteză unghiulară în raport cu reperul solidar cu placa; pentru a obține această reprezentare s-a integrat sistemul de ecuații Euler cu condițiile inițiale date. De asemenea s-a reprezentat locul punctelor de intersecție al vectorului ω cu sfera unitate tot în raport cu reperul solidar cu placa.

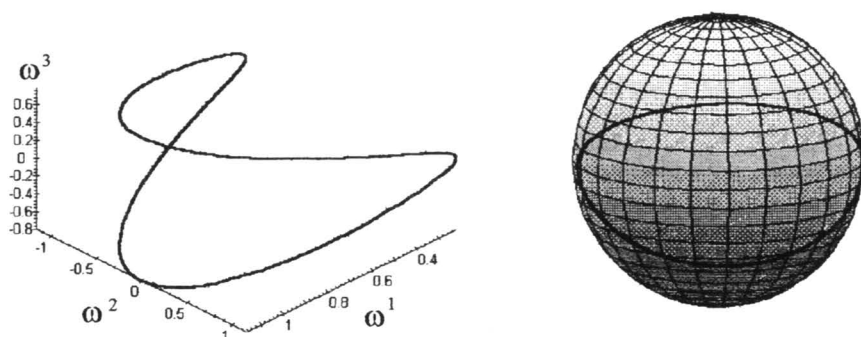


Figura 4.5.1c

$\omega^1, \omega^2, \omega^3$ fiind determinate, unghiurile de rotație proprie φ și de nutație θ rezultă utilizând conservarea direcției momentului cinetic

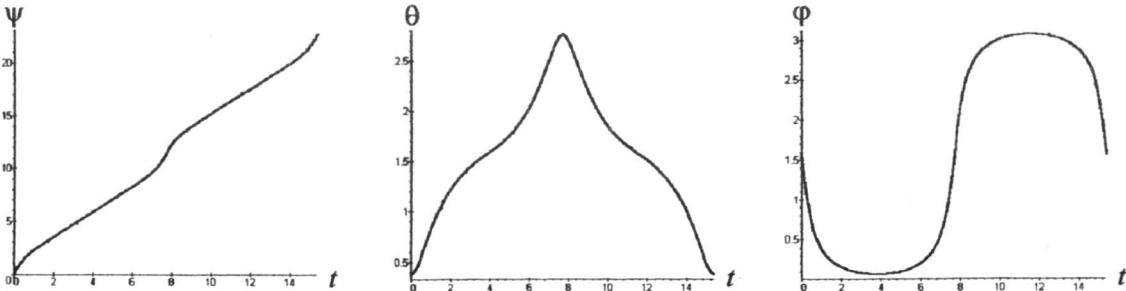
$$\begin{cases} (6b^2 + h^2)\omega^1 = \delta\mu \sin\theta \sin\varphi \\ (6a^2 + h^2)\omega^2 = \delta\mu \sin\theta \cos\varphi \\ 6(a^2 + b^2)\omega^3 = \delta\mu \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \sin\varphi = \frac{6b^2 + h^2}{\delta\mu} \omega^1 \\ \sin\theta \cos\varphi = \frac{6a^2 + h^2}{\delta\mu} \omega^2 \\ \cos\theta = \frac{6(a^2 + b^2)}{\delta\mu} \omega^3 \end{cases},$$

iar unghiul de precesie ψ prin cuadratură

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{\omega^1 \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi}{\sin \theta} = \frac{(6b^2 + h^2)(\omega^1)^2 + (6a^2 + h^2)(\omega^2)^2}{\delta \mu \sin^2 \theta} \\ \sin^2 \theta &= \frac{(6b^2 + h^2)^2 (\omega^1)^2 + (6a^2 + h^2)^2 (\omega^2)^2}{\delta^2 \mu^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\psi} &= \delta \mu \frac{\delta \mu^2 - 6(a^2 + b^2)(\omega^3)^2}{\delta^2 \mu^2 - 36(a^2 + b^2)^2 (\omega^3)^2} > 0 \\ \psi &= \psi_o + \delta \mu \int_0^t \frac{\delta \mu^2 - 6(a^2 + b^2)(\omega^3(t))^2}{\delta^2 \mu^2 - 36(a^2 + b^2)^2 (\omega^3(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Din relația pentru unghiul de nutație θ rezultă că acesta este funcție periodică cu perioada τ , la fel $\dot{\psi} = \delta \mu \frac{\delta \mu^2 - 6(a^2 + b^2)(\omega^3)^2}{\delta^2 \mu^2 - 36(a^2 + b^2)^2 (\omega^3)^2}$ și $\dot{\varphi} = \frac{\delta \mu^2 [\delta - 6(a^2 + b^2)] \omega^3}{\delta^2 \mu^2 - 36(a^2 + b^2)^2 (\omega^3)^2}$. Va rezulta

$$\begin{aligned} \varphi(t + \tau) &= \varphi(t) + 2\pi \\ \psi(t + \tau) &= \psi(t) + \Psi_o, \Psi_o > 0 \end{aligned}$$



$$a/b = 5/3$$

Figura 4.5.1d

In figura 4.5.1d s-a reprezentat variația unghiurilor lui Euler de-a lungul unei perioade. Se observă proprietățile de periodicitate pentru unghiul de nutație θ și unghiul de rotație proprie φ , precum și variația monotonă a unghiului de precesie ψ . Pentru această reprezentare se integrează sistemul complet de ecuații diferențiale: ecuațiile Euler și ecuațiile de legătură între componentele vectorului viteză unghiulară ω și unghiurile lui Euler.

In figura 4.5.1e s-a reprezentat curba descrisă de extremitatea versorului $\mathbf{l}_3$ în raport cu referențialul inerțial. Pentru aceasta la sistemul complet de ecuații diferențiale s-au adăugat ecuațiile diferențiale pentru componentele lui $\mathbf{l}_3$ în raport cu referențialul inerțial

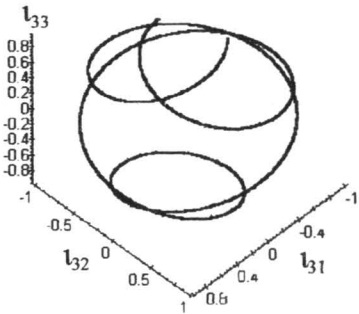


Figura 4.5.1e

$$\begin{cases} x = \sin \theta \sin \psi, \\ y = -\sin \theta \cos \psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta \dot{x} = \dot{\theta} \cos \theta x - \dot{\psi} y, \\ \sin \theta \dot{y} = \dot{\theta} \cos \theta y + \dot{\psi} x. \end{cases}$$

Pentru componenta $z = \cos \theta$ a lui $\mathbf{i}_3$ s-a ținut seama de proporționalitatea cu componenta ω^3 a vectorului viteză unghiulară.

Pentru reprezentările din diagramele de mai sus s-a utilizat programul

```
> with(plots): with(DEtools):
> a:=5: b:=3: c:=sqrt(a^2-b^2): lambda:=1: h:=1:
> k:=sqrt((6*b^2-h^2)/(6*b^2+h^2)): per:=evalf(4/lambda*sqrt(a^2*(6*a^2+h^2)/c^2/(6*a^2-h^2))*Legendr
> eKc(k));
```

Determinarea componentelor vectorului viteza unghiulara prin integrarea succesiva a ecuatiilor diferentiale de ordinul al doilea

```
> om1o:=evalf(lambda*sqrt(a^2+b^2)/a); om2o:=0; om3o:=evalf(lambda*c/a); pas:=per/200;
> al12:=evalf(lambda^2*(a^2+b^2)/a^2); bt12:=evalf(2*lambda^2*h^2*(a^2+b^2)/a^2/(6*b^2+h^2)); coef1
> :=evalf((6*a^2-h^2)*c^2/(6*a^2+h^2)/(a^2+b^2)); al1:=sqrt(al12); bt1:=sqrt(bt12);
> ec1:=diff(om1(t),t$2)-coef1*((al1+bt12)*om1(t)-2*om1(t)^3)=0;
> DEplot(ec1,[t,om1],t=0..per,[0,om1o,0],stepsize=pas);
> al22:=evalf(lambda^2*(a^2+b^2)/a^2*(6*a^2-h^2)/(6*a^2+h^2)*(6*b^2+h^2)/(6*b^2-h^2)); bt22:=evalf(l
> ambda^2*(a^2+b^2)/a^2*(6*a^2-h^2)/(6*a^2+h^2)); coef2:=evalf(c^2/(a^2+b^2)*(6*b^2-h^2)/(6*b^2+h
> 2)); al2:=sqrt(al22); bt2:=sqrt(bt22); dom2o:=sqrt(coef2)*al2*bt2;
> ec2:=diff(om2(t),t$2)-coef2*(2*om2(t)^3-(al22+bt22)*om2(t))=0;
> DEplot(ec2,[t,om2],t=0..per,[0,om2o,dom2o],stepsize=pas);
> al32:=evalf(lambda^2*c^2/a^2); bt32:=evalf(2*lambda^2*c^2*h^2/a^2/(6*b^2-h^2)); coef3:=evalf((6*b
> 2-h^2)*(6*a^2-h^2)/(6*b^2+h^2)/(6*a^2+h^2)); al3:=sqrt(al32); bt3:=sqrt(bt32);
> ec3:=diff(om3(t),t$2)-coef3*((al32-bt32)*om3(t)-2*om3(t)^3)=0;
> DEplot(ec3,[t,om3],t=0..per,[0,om3o,0],stepsize=pas);
```

Curba descrisa de vectorul viteza unghiulara prin integrarea sistemului de ecuatii Euler (ecuatii diferentiale de primul ordin)

```
> C1:=(6*b^2-h^2)/(6*b^2+h^2); C2:=-(6*a^2-h^2)/(6*a^2+h^2); C3:=c^2/(a^2+b^2);
> DEplot([diff(om1(t),t)+C1*om2(t)*om3(t)=0,diff(om2(t),t)+C2*om1(t)*om3(t)=0,diff(om3(t),t)+C3*om1(t)
> *om2(t)=0],[t,om1,om2,om3],t=0..per,[0,om1o,om2o,om3o],stepsize=pas,scene=[om1,om2,om3]);
```

Curba descrisa de intersectia vectorului viteza unghiulara cu sfera unitate, utilizand relatiile algebrice corespunzand integralelor prime

```
> f1:=proc(om2) (6*a^2+h^2)*(6*b^2-h^2)/(6*a^2-h^2)/(6*b^2+h^2)*(al22-om2^2) end:
> f3:=proc(om2) (6*a^2+h^2)*c^2/(6*a^2-h^2)/(a^2+b^2)*(bt22-om2^2) end:
> f:=proc(om2) f1(om2)+om2^2+f3(om2) end:
> i1:=6*b^2+h^2: i2:=6*a^2+h^2: i3:=6*(a^2+b^2): ko2:=lambda^2*(a^2+b^2)*(36*a^4+12*b^2*h^2+h^4)/
> a^2: en:=lambda^2*(a^2+b^2)*(6*a^2+h^2)/a^2: ro:=sqrt(1-i3^2*om3o^2/ko2): ko:=sqrt(ko2):
> l1:=spacecurve([sqrt(f1(om2)/f(om2)),om2/sqrt(f(om2)),sqrt(f3(om2)/f(om2))],om2=0..bt2,numpoints=1
> 00,thickness=2,color=black);
> l2:=spacecurve([sqrt(f1(om2)/f(om2)),om2/sqrt(f(om2)),sqrt(f3(om2)/f(om2))],om2=0..bt2,numpoints=
> 100,thickness=2,color=black);
> l3:=spacecurve([sqrt(f1(om2)/f(om2)),om2/sqrt(f(om2)),sqrt(f3(om2)/f(om2))],om2=-bt2..0,numpoints=
> 100,thickness=2,color=black);
> l4:=spacecurve([sqrt(f1(om2)/f(om2)),om2/sqrt(f(om2)),sqrt(f3(om2)/f(om2))],om2=-bt2..0,numpoints=
> 100,thickness=2,color=black);
> sfera:=plot3d([sin(th)*cos(phi),sin(th)*sin(phi),cos(th)],th=0..Pi,phi=0..2*Pi);
> paral1:=spacecurve([ro*cos(v),ro*sin(v),i3*zo/ko],v=0..2*Pi,numpoints=100,color=black): paral2:=space
> curve([ro*cos(v),ro*sin(v),-i3*zo/ko],v=0..2*Pi,numpoints=100,color=black):
> display([l1,l2,l3,l4,sfera,paral1,paral2],scaling=constrained,orientation=[0,90]);
```

Determinarea componentelor vectorului viteza unghiulara, unghiurilor lui Euler

```
> psio:=0: thetaso:=evalf(arccos(6*(a^2+b^2)*om3o/sqrt(lambda^2*(a^2+b^2)/a^2*(36*a^4+12*b^2*h^2+h
> ^4)))): phio:=Pi/2:
> sys1:=diff(om1(t),t)+C1*om2(t)*om3(t)=0,diff(om2(t),t)+C2*om1(t)*om3(t)=0,diff(om3(t),t)+C3*om1(t)*o
> m2(t)=0,sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)),diff(theta(t),t)=om1(t)*cos(phi(t))-
> om2(t)*sin(phi(t)),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=om3(t)*sin(theta(t))-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*c
> os(theta(t));
> fcns:={om1(t),om2(t),om3(t),psi(t),theta(t),phi(t)};
```



```

> p:=dsolve({sys1,om1(0)=om1o,om2(0)=om2o,om3(0)=om3o,psi(0)=psio,theta(0)=thetao,phi(0)=phio},f
> cns,type=numeric);
> odeplot(p,[t,om1(t)],0..per,numpoints=100);
> odeplot(p,[t,om2(t)],0..per,numpoints=100);
> odeplot(p,[t,om3(t)],0..per,numpoints=100);
> odeplot(p,[t,psi(t)],0..per,numpoints=100);
> odeplot(p,[t,theta(t)],0..per,numpoints=100);
> odeplot(p,[t,phi(t)],0..per,numpoints=100);
> odeplot(p,[om1(t),om2(t),om3(t)],0..per,numpoints=50);
Curba descrisa de versorul normal la planul median al plăcii în raport cu reperul fix
> A1:=C1*ko/i3; A2:=C2*ko/i3; A3:=C3*i3/ko; A4:=(i1-i2)/ko; mo:=en/ko;
> sys2:=diff(om1(t),t)+A1*om2(t)*z(t)=0,diff(om2(t),t)+A2*om1(t)*z(t)=0,ko/i3*diff(z(t),t)+C3*om1(t)*om2(t)
> )=0,diff(x(t),t)=-A4*z(t)*x(t)*om1(t)*om2(t)/(1-z(t)^2)-(mo-ko/i3*z(t)^2)*y(t)/(1-z(t)^2),diff(y(t),t)=-A4*z(t)*y
> (t)*om1(t)*om2(t)/(1-z(t)^2)+(mo-ko/i3*z(t)^2)*x(t)/(1-z(t)^2);
> zo:=evalf(lambda*c/a*i3/ko); xo:=0; yo:=-sqrt(1-zo^2);
> fcns2:={om1(t),om2(t),x(t),y(t),z(t)};
> q:=dsolve({sys2,om1(0)=om1o,om2(0)=om2o,x(0)=xo,y(0)=yo,z(0)=zo},fcns2,type=numeric,method=d
> verk78);
> odeplot(q,[x(t),y(t),z(t)],0..per,numpoints=2000);

```

4.5.2. O placă plană, omogenă, grea, subțire, limitată de elipsa de semiaxe a , b , $a > b$, este mobilă în jurul centrului său de masă O . La momentul inițial viteza punctului A este paralelă cu OB și egală cu $\lambda\sqrt{a^2 - b^2}$, iar componenta normală la planul plăcii a vitezei punctului B este $\lambda\frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}$, $\lambda > 0$ constant.

Să se studieze mișcarea plăcii.

Din aceleași motive ca și în problema precedentă, problema se încadrează în cazul Euler-Poinsot.

Axele principale de inerție prin O coincid cu axele elipsei și normala la planul plăcii; M fiind masa plăcii. momentele principale de inerție sunt, în ipoteza plăcii subțiri,

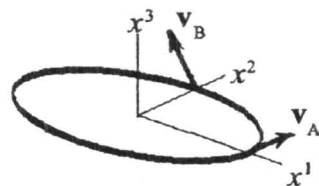


Figura 4.5.2a

$$I_1 = \iint_{D_0} \rho_o (x^2)^2 dx^1 dx^2 = ab\rho_o \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 b^2 u^3 \sin^2 v du \right) dv = \frac{1}{4} Mb^2,$$

$$I_2 = \frac{1}{4} Ma^2, I_3 = \frac{1}{4} M(a^2 + b^2),$$

$$M = \iint_{D_0} \rho_o dx^1 dx^2 = \pi ab\rho_o.$$

Condițiile inițiale sunt, ca și în problema precedentă

$$\omega_o^1 = \lambda \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \omega_o^2 = 0, \omega_o^3 = \lambda \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Ecuatiile lui Euler se scriu în acest caz, după efectuarea unor simplificări

$$\begin{cases} \dot{\omega}^1 + \omega^2 \omega^3 = 0 \\ \dot{\omega}^2 - \omega^3 \omega^1 = 0 \\ (a^2 + b^2) \dot{\omega}^3 + (a^2 - b^2) \omega^1 \omega^2 = 0 \end{cases}.$$

Sistemul admite următoarele integrale prime:

– conservarea momentului cinetic $\mathbf{K}_O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}$ ca vector

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} = \overrightarrow{\text{const}},$$

cu cele două aspecte

– conservarea mărimii momentului cinetic $\|\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}\| = \text{const.}$, adică

$$b^4(\omega^1)^2 + a^4(\omega^2)^2 + (a^2 + b^2)(\omega^3)^2 = \delta^2 \mu^2, \quad \delta^2 \mu^2 = \lambda^2 a^2 (a^2 + b^2),$$

– conservarea direcției momentului cinetic, direcția acestuia fiind $\mathbf{I}_3$, deci

$$\mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega} = \delta \mu \mathbf{I}_3;$$

– conservarea energiei cinetice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega} \right) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$$

adică

$$b^2(\omega^1)^2 + a^2(\omega^2)^2 + (a^2 + b^2)(\omega^3)^2 = \delta \mu^2, \quad \delta \mu^2 = \lambda^2 (a^2 + b^2);$$

– o integrală primă datorată ipotezei de placă subțire

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = \lambda^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2}.$$

Cele trei integrale prime nu pot fi independente pentru că, dacă ar fi independente, ar rezulta că viteza unghiulară este constantă, o asemenea soluție cu $\lambda > 0$ neverificând însă a doua ecuație diferențială; de altfel, se constată ușor că determinantul sistemului algebric în pătratele componentelor vitezei unghiulare este nul

$$\det \begin{bmatrix} b^4 & a^4 & (a^2 + b^2)^2 \\ b^2 & a^2 & a^2 + b^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

adică relațiile nu sunt independente. Din ultimele două integrale prime care au coeficienți mai simpli, după determinarea constantelor din datele inițiale, rezultă

$$\begin{cases} (\omega^1)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} (\omega^3)^2 \\ (\omega^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2} \lambda^2 - (\omega^3)^2 \right] \end{cases}.$$

Revenind la cea de a treia ecuație Euler se obține

$$\dot{\omega}^3 = -\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \omega^3 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} \lambda^2 - (\omega^3)^2},$$

semnul "–" din membrul drept se datorează faptului că ω^3 nu poate decât să descrească. Integrând se obține

$$\omega^3 = \frac{c}{a} \lambda \operatorname{ch} \left(\frac{c}{a} \lambda t \right), \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

ω^1 și ω^2 au același semn conform datelor inițiale, iar din a doua ecuație Euler rezultă $\dot{\omega}^2 > 0$ de unde $\omega^2 > 0$, deci

$$\begin{cases} \omega^1 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \lambda \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{c}{a} \lambda t \right)} \\ \omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \lambda \operatorname{th} \left(\frac{c}{a} \lambda t \right) \\ \omega^3 = \frac{c}{a} \lambda \frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{c}{a} \lambda t \right)} \end{cases}.$$

Unghiurile lui Euler se obțin ținând seama că momentul cinetic este un vector constant, fix în referențialul inerțial; alegând axa OX^3 pe direcția fixă a momentului cinetic, în sensul acestuia, rezultă rotația proprie φ și nutația θ din ecuațiile trigonometrice

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\frac{c}{a} \lambda t \right)},$$

$$\cos \theta = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2} \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{c}{a}\lambda t\right)},$$

iar precesia ψ se calculează prin cuadratură din

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega^1(t)\sin \varphi(t) + \omega^2(t)\cos \varphi(t)}{\sin \theta(t)}.$$

Se constată că mișcarea tinde către o rotație uniformă în jurul axei mici a plăcii eliptice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega^2(t) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \lim_{t \rightarrow \infty} \omega^1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega^3(t) = 0.$$

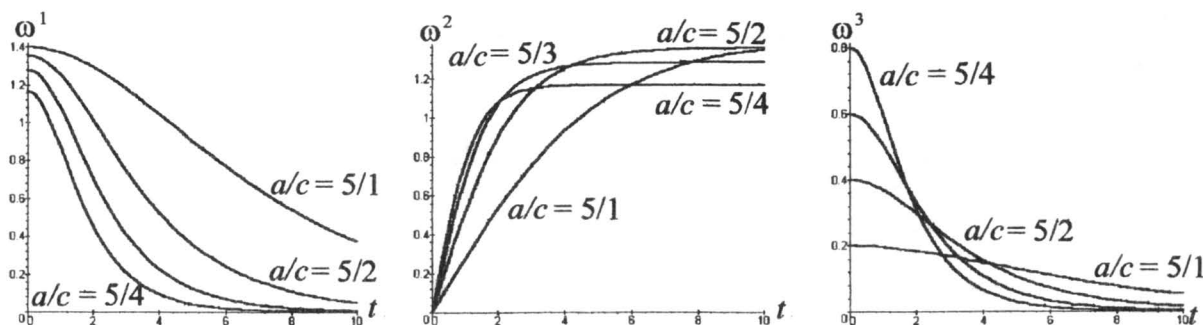


Figura 4.5.2b

În figura 4.5.2b este prezentată variația în timp a componentelor vitezei unghiulare ω ținând seama de raportul dintre semiaxe. Comportarea pentru valori mai mari ale timpului se poate citi pe aceste diagrame.

În figura 4.5.2c este prezentată curba descrisă de intersecția vectorului viteză unghiulară cu sfera unitate în raport cu reperul solidar cu placa eliptică. Și aici se observă comportarea asimptotică a vectorului ω .

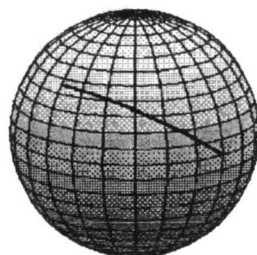


Figura 4.5.2c

Pentru aceleași valori ale raportului semi-axelor ca și în cazul vitezei unghiulare, în figura 4.5.2d este prezentată variația unghiurilor lui Euler.

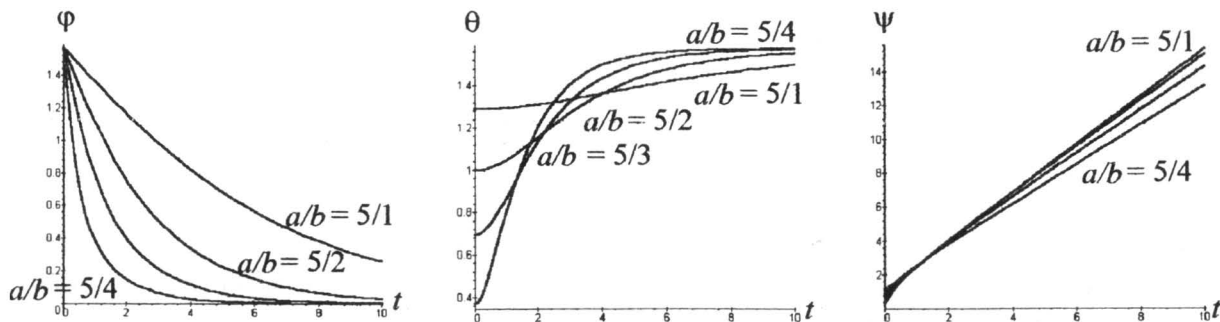


Figura 4.5.2d

În sfârșit în figura 4.5.2e este reprezentată curba descrisă de vectorul în raport cu reperul fix. și aici se observă tendința acestui vector de a deveni orizontal.

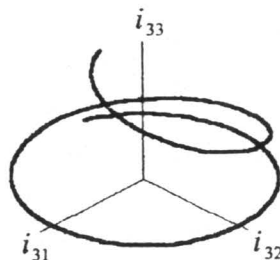


Figura 4.5.2c

Pentru reprezentările din diagramele de mai sus s-a utilizat programul

```
> with(plots):
> om1:=proc(a,c,t) sqrt(2*a^2-c^2)/a/cosh(c*t/a) end:
> om2:=proc(a,c,t) sqrt(2*a^2-c^2)/a*tanh(c*t/a) end:
> om3:=proc(a,c,t) c/a/cosh(c*t/a) end:
> plot([om1(5,1,t),om1(5,2,t),om1(5,3,t),om1(5,4,t)],t=0..10,thickness=2,color=black);
> plot([om2(5,1,t),om2(5,2,t),om2(5,3,t),om2(5,4,t)],t=0..10,thickness=2,color=black);
> plot([om3(5,1,t),om3(5,2,t),om3(5,3,t),om3(5,4,t)],t=0..10,thickness=2,color=black);
> evalf(om1(5,1,10)); evalf(om1(5,2,10)); evalf(om1(5,3,10)); evalf(om1(5,4,10));
> evalf(om2(5,1,10)); evalf(om2(5,2,10)); evalf(om2(5,3,10)); evalf(om2(5,4,10));
> evalf(om3(5,1,10)); evalf(om3(5,2,10)); evalf(om3(5,3,10)); evalf(om3(5,4,10));
> uphi:=proc(a,c,t) arctan((a^2-c^2)/a^2/sinh(c*t/a)) end:
> plot([uphi(5,1,t),uphi(5,2,t),uphi(5,3,t),uphi(5,4,t)],t=0..10,thickness=2,color=black);
> evalf(uphi(5,1,10)); evalf(uphi(5,2,10)); evalf(uphi(5,3,10)); evalf(uphi(5,4,10));
> costheta:=proc(a,c,t) c*sqrt(2*a^2-c^2)/a^2/cosh(c*t/a) end:
> plot([costheta(5,1,t),costheta(5,2,t),costheta(5,3,t),costheta(5,4,t)],t=0..10,thickness=2);
> utheta:=proc(a,c,t) arccos(costheta(a,c,t)) end:
> plot([utheta(5,1,t),utheta(5,2,t),utheta(5,3,t),utheta(5,4,t)],t=0..10,thickness=2,color=black);
> evalf(utheta(5,1,10)); evalf(utheta(5,2,10)); evalf(utheta(5,3,10)); evalf(utheta(5,4,10));
> upsi:=proc(a,c,t) arctan((a^4*(exp(2*c/a*t)-1)+2*(a^2-c^2)^2/(a^2-c^2)/c/sqrt(2*a^2-c^2))-arctan(a^2-c^2)/c/sqrt(2*a^2-c^2))
> +sqrt(2*a^2-c^2)/a*t end:
> plot([upsi(5,1,t),upsi(5,2,t),upsi(5,3,t),upsi(5,4,t)],t=0..10,thickness=2,color=black);
> evalf(upsi(5,1,10)); evalf(upsi(5,2,10)); evalf(upsi(5,3,10)); evalf(upsi(5,4,10));
> om:=proc(a,c,t) sqrt(om1(a,c,t)^2+om2(a,c,t)^2+om3(a,c,t)^2) end:
> curbom:=spacecurve([om1(5,4,t)/om(5,4,t),om2(5,4,t)/om(5,4,t),om3(5,4,t)/om(5,4,t)],t=0..25,numpoints=100,thickness=2,color=black);
> r:=black);
> sfera:=plot3d([sin(tt)*cos(p),sin(tt)*sin(p),cos(tt)],tt=0..Pi,p=0..2*Pi);
> display([curbom,sfera],orientation=[45,75],scaling=constrained);
> curbi3:=spacecurve([sin(utheta(5,4,t))*sin(upsi(5,4,t)),sin(utheta(5,4,t))*cos(upsi(5,4,t)),cos(utheta(5,4,t))],t=0..8,numpoints=100,thickness=3,color=black);
> display([sfera,curbi3]);
> cbi3:=spacecurve([sin(utheta(5,4,t))*sin(upsi(5,4,t)),sin(utheta(5,4,t))*cos(upsi(5,4,t)),cos(utheta(5,4,t))],t=0..9.2,numpoints=100,thickness=3);
> Ox:=spacecurve([x,0,0],x=0..1.1,color=black);
> Oy:=spacecurve([0,y,0],y=0..1.1,color=black);
> Oz:=spacecurve([0,0,z],z=0..1.1,color=black);
> display([cbi3,Ox,Oy,Oz]);
```

4.5.3. Se consideră un cub omogen greu, de muchie a , de masă M . Să se studieze mișcarea cubului în jurul unui vârf O fixat, știind că la momentul inițial o muchie prin O este verticala ascendentă și corpul este animat de o rotație în jurul diagonalei OO' , de mărime ω_0 . Să se determine ω_0 în funcție de a și de accelerația gravitațională g , astfel încât valoarea maximă a unghiului ascuțit făcut de diagonala OO' cu verticala ascendentă să fie 90° .

Problema se încadrează în cazul Lgrange-Poisson.

Referențialul inerțial se alege astfel încât axa Ox^3 să fie verticală ascendentă.

Diagonala OO' fiind axă de simetrie a cubului, reperul solidar cu rigidul se alege astfel încât axa Ox^3 să coincidă cu această diagonală. Axele Ox^1 și Ox^2 vor fi axe principale de inerție în plan perpendicular pe diagonala OO' .

Centrul de masă este caracterizat în raport cu reperul solidar cu cubul prin

$$\mathbf{x}_C = \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{t}_3.$$

Momentele centrale principale de inerție sunt

$$I_{C1} = I_{C2} = I_{C3} = \frac{1}{3} Ma^2$$

(pentru calcul se iau în considerație axe paralele cu muchiile cubului). Momentele de inerție în raport cu punctul O , relativ la reperul determinat de muchiile prin O , sunt

$$I_O^{11} = I_O^{22} = I_O^{33} = \frac{2}{3} Ma^2; I_O^{12} = I_O^{23} = I_O^{31} = -\frac{1}{4} Ma^2.$$

Momentele principale de inerție în raport cu punctul O , cu alegerea menționată a direcțiilor principale, sunt (v.pb.2.11)

$$I_1 = I_2 = \frac{11}{12} Ma^2, I_3 = \frac{1}{6} Ma^2.$$

Condițiile inițiale se explicitază

$$\omega_o^1 = \omega_o^2 = 0, \omega_o^3 = \omega_o$$

$$\cos \theta_o = \frac{1}{\sqrt{3}}, \psi_o = 0, \varphi_o = 0.$$

Ecuatiile de mișcare admit integralele prime:

– conservarea componentei momentului cinetic pe direcția verticală (forța de greutate având direcție fixă)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{t}_3 \times (-Mg \mathbf{I}_3) \Big| \cdot \mathbf{I}_3; \mathbf{I}_3 \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1(\omega^1 \sin \theta \sin \varphi + \omega^2 \sin \theta \cos \varphi) + I_3 \omega^3 \cos \theta = \text{const.};$$

– integrala energiei (forța de greutate fiind conservativă)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{t}_3 \cdot (-Mg \mathbf{I}_3) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + I_3 (\omega^3)^2 + Mga\sqrt{3} \cos \theta = \text{const.};$$

– conservarea componentei momentului cinetic pe direcția $\mathbf{t}_3$ (simetrie axială a distribuției masei)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \frac{\sqrt{3}}{2} a \mathbf{t}_3 \times (-Mg \mathbf{I}_3) \Big| \cdot \mathbf{t}_3; \mathbf{t}_3 \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \dots = \frac{d}{dt}(I_3 \omega^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 \omega^3 = \text{const.}$$

Exprimând viteza unghiulară cu ajutorul unghiurilor lui Euler și utilizând condițiile inițiale, integralele prime devin

$$I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta - I_3 \omega_o \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos \theta \right) = 0,$$

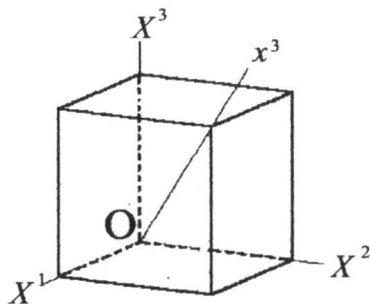


Figura 4.5.3a

$$I_1(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) - Mga\sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos \theta \right) = 0,$$

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = \omega_o.$$

Eliminarea lui $\dot{\psi}$ între primele două integrale prime conduce la ecuația diferențială pentru θ

$$\dot{\theta}^2 = (1 - \sqrt{3} \cos \theta) \left[\frac{12g}{11a} - \frac{4}{363} \frac{\omega_o^2}{\sin^2 \theta} (1 - \sqrt{3} \cos \theta) \right].$$

Cu schimbarea de variabilă

$$u = \cos \theta$$

ecuația devine

$$\dot{u}^2 = P_3(u)$$

cu notația

$$P_3(u) = (1 - \sqrt{3} u) \left[\frac{12g}{11a} (1 - u^2) - \frac{4}{363} \omega_o^2 (1 - \sqrt{3} u) \right]$$

polinom de gradul 3. Extinzând intervalul $[-1, 1]$ de variație a lui u corespunzătoare semnificației acestei variabile, la dreapta reală, se obține tabelul

u	$-\infty$	-1				u_1	$u_o = u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$				1	u_3	$+\infty$
$P_3(u)$	—	—	—	—	0	+	0	—	—	—	0	+	+
					[	←	]						
					[	→	]						

Acest tabel arată că u va varia în intervalul $[u_1, u_2]$, în prima parte a mișcării descrescând de la u_2 la u_1 conform ecuației

$$\dot{u} = -\sqrt{P_3(u)},$$

după care crește din nou de la u_1 până la u_2 conform ecuației

$$\dot{u} = +\sqrt{P_3(u)}.$$

Corespunzător, θ mai întâi va crește de la $\theta_2 = \theta_o$ la θ_1 ($u_1 = \cos \theta_1$), apoi va descresce de la θ_1 la θ_2 ș.a.m.d.

Cu o nouă schimbare de variabilă

$$u = u_1 + z^2(u_2 - u_1)$$

rezolvarea problemei revine la utilizarea integralelor eliptice

$$\pm t \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{11a}(u_3 - u_1)} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

cu

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} < 1.$$

Perioada mișcării este

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{11a}{3\sqrt{3}g} \cdot \frac{1}{u_3 - u_1}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Odată stabilită variația lui θ , pentru ψ se rezolvă ecuația

$$\dot{\psi} = \frac{2}{11\sqrt{3}}\omega_o \frac{1 - \sqrt{3} \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (\text{sgn} \dot{\psi} = \text{sgn} \omega_o);$$

se observă că $\dot{\psi}$ păstrează semn constant, acela al lui $\dot{\psi}_o = \omega_o$, deci ψ variază monoton.

În fine, ψ și θ fiind determinați, ϕ se obține prin cuadratura

$$\dot{\phi} = \omega_o - \dot{\psi} \cos \theta.$$

Curba trasată de axa Ox^3 pe o sferă cu centrul în O este cuprinsă între cercurile $\theta = \theta_o$, $\theta = \theta_1$ (acesta din urmă fiind sub primul). Un punct de pe această curbă este definit de θ și ψ . Unghiul tangentei la curbă cu tangenta la meridian este dat de

$$\text{tg} \alpha = \frac{\dot{\psi} \sin \theta}{\dot{\theta}} = \frac{2}{11\sqrt{3}}\omega_o \frac{1 - \sqrt{3} u}{\sqrt{(1-u^2)P_3(u)}}.$$

Pentru $u = u_2$ rezultă $\text{tg} \alpha = 0$ deci curba este normală la cercul $\theta = \theta_2$, iar pentru $u = u_1$ tangenta devine infinită deci curba este tangentă la cercul $\theta = \theta_1$.

Pentru ca cea mai mare valoare θ să fie 90° ($\pi/2$) trebuie ca $u_1 = 0$, adică

$$\omega_o = \sqrt{99 \frac{g}{a}}.$$

Pentru această valoare vitezei unghiulare inițiale, în figura 4.5.3b s-au reprezentat variabilele u și θ rezultate din integrarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare de-a lungul unei perioade.

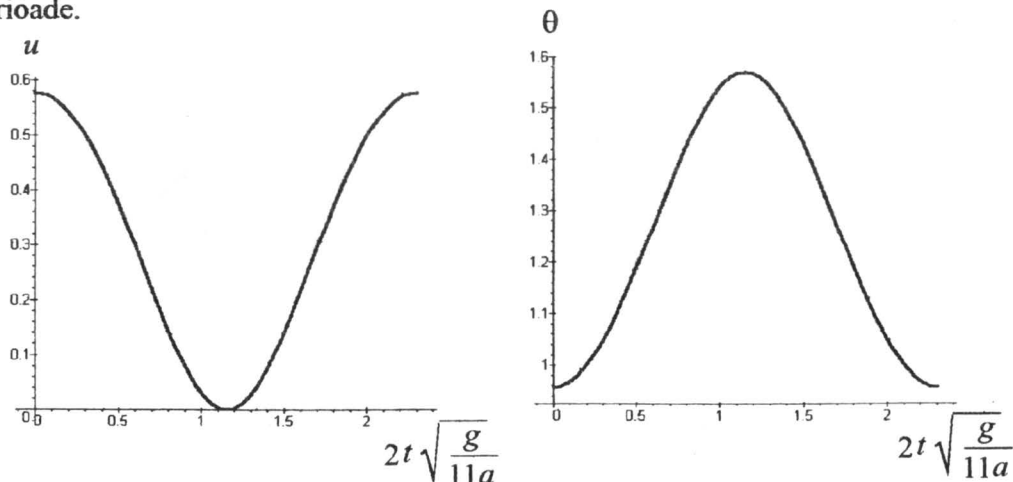


Figura 4.5.3b

Variația în același interval de timp a componentelor neconstante ale vectorului viteză unghiulară este prezentată în figura 4.5.3c, iar cea a unghiurilor lui Euler în figura 4.5.3d.

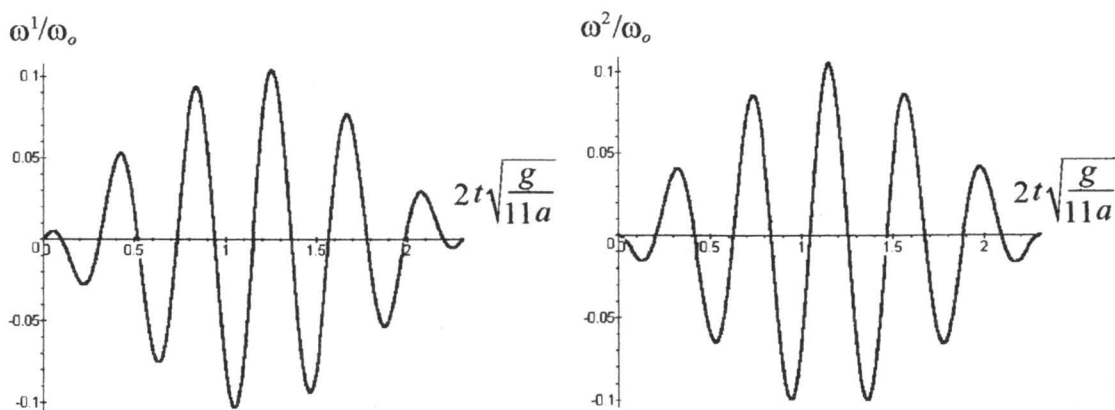


Figura 4.5.3c

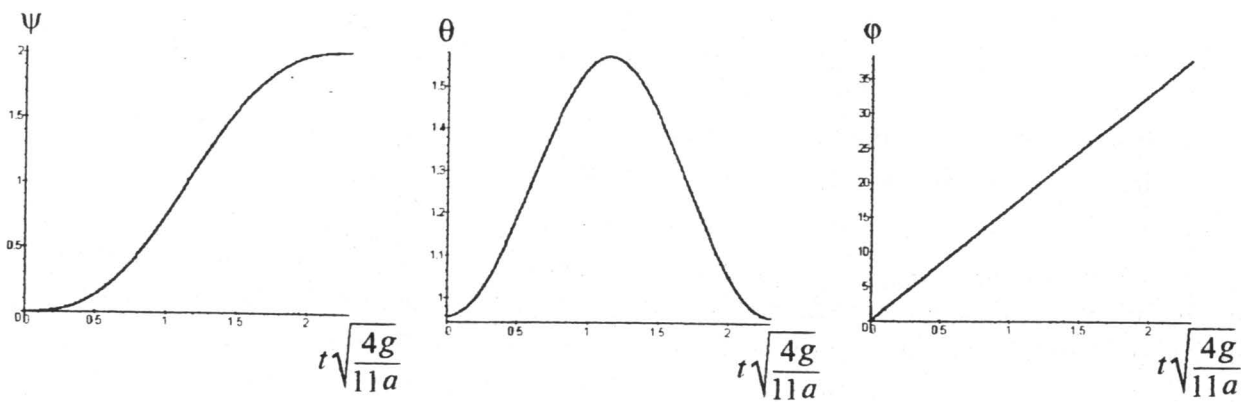


Figura 4.5.3d

O idee asupra mișcării cubului se poate obține din diagrama redând intersecția versorului vectorului ω cu sfera unitate în raport cu reperul solidar cu solidul rigid precum și curba descrisă de extremitatea vectorului $\mathbf{l}_3$ în raport cu reperul fix.

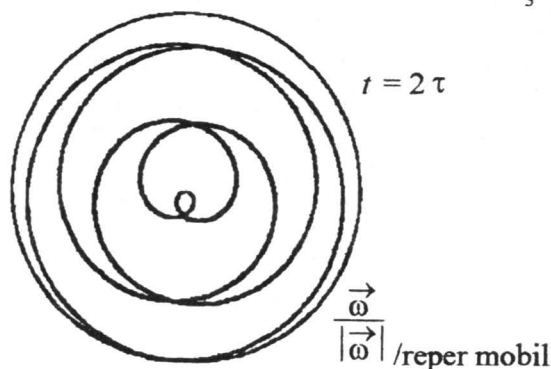


Figura 4.5.3e



Figura 4.5.3f

Aceste rezultate au fost obținute cu ajutorul programului următor

```
> with(plots): with(DEtools):
> i1:=11/12: i3:=1/6: m:=(i3-i1)/i1: uo:=sqrt(3)/3: tto:=evalf(arccos(uo)): so:=evalf(sqrt(2/3)): co:=evalf(sqrt(1/3)):
> u1:=0: u2:=sqrt(3)/3: u3:=sqrt(3): k:=sqrt((u2-u1)/(u3-u1)): per:=evalf(4*LegendreKc(k)/3):
> sys1:=diff(om1(t),t)-27/2*om2(t)=sqrt(3)/11*sin(theta(t))*cos(phi(t)), diff(om2(t),t)+27/2*om1(t)=-sqrt(3)/11*sin(theta(t))*sin(phi(t))
> , sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=33/2*(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t))), diff(theta(t),t)=33/2*(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t))),
> sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=33/2*(sin(theta(t))-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*cos(theta(t))), sin(theta(t))*diff(x(t),t)=33/2*((o
> m1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*cos(theta(t))*x(t)-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*y(t), sin(theta(t))*diff(y(t),t)=33/2*((
> om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*cos(theta(t))*y(t)+(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*x(t), diff(z(t),t)=-33/2*(om1(t)*cos
> (phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*sin(theta(t));
> fcns:={om1(t),om2(t),psi(t),theta(t),phi(t),x(t),y(t),z(t)}:
> p1:=dsolve({sys1,om1(0)=0,om2(0)=0,psi(0)=0,theta(0)=tto,phi(0)=0,x(0)=0,y(0)=so,z(0)=co},fcns,type=numeric);
> p1(0); p1(0.1);
> odeplot(p1,[t,om1(t)],0..per,numpoints=400);
> odeplot(p1,[t,om2(t)],0..per,numpoints=400);
> odeplot(p1,[t,psi(t)],0..per,numpoints=400);
> odeplot(p1,[t,theta(t)],0..per,numpoints=400);
> odeplot(p1,[t,phi(t)],0..per,numpoints=400);
> odeplot(p1,[om1(t),om2(t),1],0..2*per,numpoints=1000,color=black,thickness=2,scaling=constrained,orientation=[-90,0]);
> l:=odeplot(p1,[x(t),y(t),z(t)],0..6*per,numpoints=1800,color=black,thickness=2);
> sfera:=plot3d([sin(u)*cos(v),sin(u)*sin(v),cos(u)],u=0..Pi,v=0..2*Pi);
> para1:=spacecurve([so*cos(v),so*sin(v),co],v=0..2*Pi,style=point,color=black);
> para2:=spacecurve([cos(v),sin(v),0],v=0..2*Pi,style=point,color=black);
> display([l,sfera,para1,para2],scaling=constrained,orientation=[-80,75]);
```

4.5.4. O sferă omogenă grea, de rază r , se poate roti fără frecare în jurul centrului său fixat în O . Un punct material P , având aceeași masă M ca și sfera, este fixat pe suprafața acesteia.

Să se scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului rigid astfel constituit.

Ce relație trebuie să verifice condițiile inițiale ale acestei mișcări pentru ca unghiul razei OP cu verticala ascendentă să ia ca valori extreme 0 și $\pi/2$?

Să se figureze în acest caz proiecția (C) pe un plan orizontal a curbei descrise de punctul P .

Problema se încadrează în cazul Lagrange-Poisson.

Axa OX^3 a referențialului inerțial este verticala ascendentă. Reperul solidar cu sistemul rigid are axa Ox^3 după OP iar celelalte axe în plan normal pe aceasta (reperul este astfel format de direcțiile principale de inerție).

Momentele principale de inerție al sistemului rigid în raport cu O sunt

$$I_1 = I_2 = \frac{7}{5}Mr^2, I_3 = \frac{2}{5}Mr^2,$$

iar centrul de masă se află pe OP

$$\mathbf{x}_C = \frac{r}{2} \mathbf{1}_3.$$

Ecuațiile de mișcare Euler sunt

$$\begin{cases} 7\dot{\omega}^1 - 5\omega^2\omega^3 = 5\frac{g}{r} \sin \theta \cos \varphi, \\ 7\dot{\omega}^2 + 5\omega^3\omega^1 = -5\frac{g}{r} \sin \theta \sin \varphi, \\ \dot{\omega}^3 = 0. \end{cases}$$

Problema admite următoarele integrale prime:

– conservarea proiecției momentului cinetic pe axa OX^3 (forța de greutate are direcție fixă)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \frac{r}{2} \mathbf{1}_3 \times (-2Mg \mathbf{1}_3) \Big| \cdot \mathbf{1}_3; \quad \mathbf{1}_3 \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{1}_3 \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I^1(\omega^1 \sin \theta \sin \varphi + \omega^2 \sin \theta \cos \varphi) + I_3 \omega^3 \cos \theta = \text{const.};$$

– conservarea energiei totale (forța de greutate este conservativă)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r}{2} \mathbf{1}_3 \cdot (-2Mg \mathbf{1}_3)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1[(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2] + I_3(\omega^3)^2 = -2Mg r \cos \theta + \text{const.}$$

– conservarea proiecției vitezei unghiulare pe Ox^3 (simetria axială a distribuției masei)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \frac{r}{2} \mathbf{1}_3 \times (-2Mg \mathbf{1}_3) \Big| \cdot \mathbf{1}_3; \quad \mathbf{1}_3 \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = \dots = \frac{d}{dt}(I_3 \omega^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_3 \omega^3 = I_3 \omega_o^3.$$

Exprimând cu unghiuri Euler, se obțin relațiile

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = \omega_o^3$$

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 = \alpha - a \cos \theta,$$

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta = \beta - b \omega_o^3 \cos \theta,$$

cu

$$a = \frac{10g}{7r}, \quad \alpha = a \cos \theta_o + \dot{\psi}_o^2 \sin^2 \theta_o + \dot{\theta}_o^2,$$

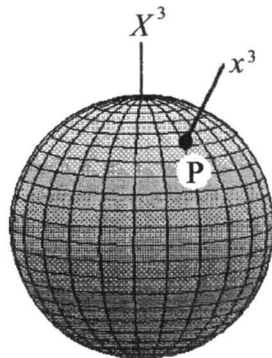


Figura 4.5.4a

$$b = \frac{2}{7}, \quad \beta = b\omega_o^3 \cos \theta_o + \dot{\psi}_o \sin^2 \theta_o.$$

Procedând ca și la problema precedentă, se obține ecuația diferențială pentru $u = \cos \theta$

$$\dot{u}^2 = P_3(u)$$

unde polinomul de grad trei este

$$P_3(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - b\omega_o^3 u)^2.$$

Variația lui θ între 0 și $\pi/2$ se realizează cerând

$$P_3(0) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta^2$$

$$P_3(1) = 0 \Rightarrow \beta = b\omega_o^3.$$

Cea de a treia rădăcină a polinomului este

$$u_* = \frac{2\beta^2 - a}{a} = \frac{2b^2(\omega_o^3)^2 - a}{a}.$$

Pentru ca θ să ia toate valorile din intervalul $[0, \pi/2]$ este necesar ca $u_* > 1$, adică

$$(\omega_o^3)^2 > \frac{a}{b^2}.$$

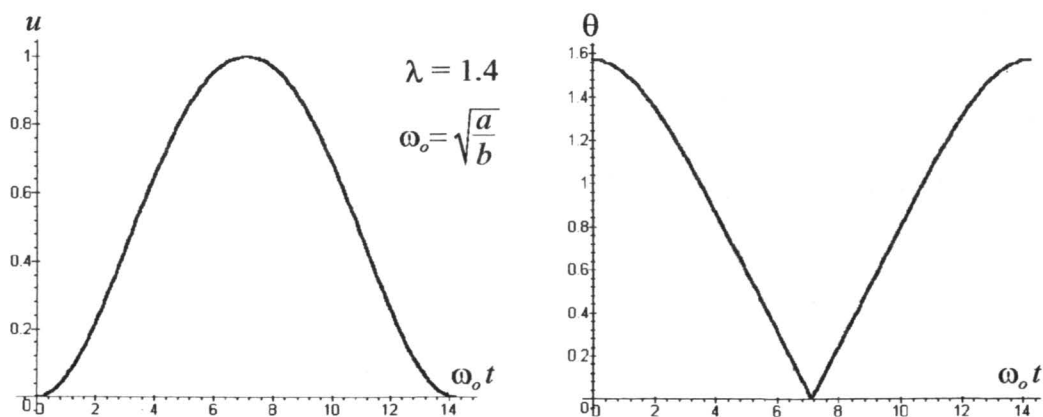
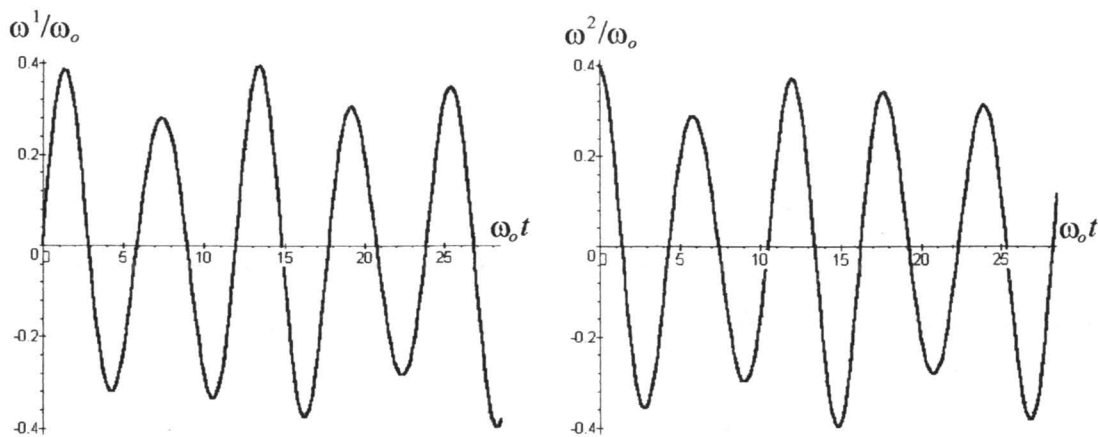


Figura 4.5.4b



$$\lambda = 1.4; \quad \omega_o = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Figura 4.5.4c

Pentru $(\omega_o^3)^2 = \lambda^2 \frac{a}{b^2}$, $\lambda > 1$ se observă că $\dot{\theta} = 0$ pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ și ia valoarea

$\dot{\theta}^2 = b^2(\omega_o^3)^2 - a > 0$ pentru $\theta = 0$. Perioada este dată de relația

$$\tau = \frac{4}{\sqrt{au_*}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{1}{u_*}}\right).$$

Pentru $\lambda = 1.4$, în figura 4.5.4b s-a prezentat variația în timp a variabilei auxiliare u și a unghiului de nutație. Pentru aceeași valoare λ în figura 4.5.4c este redată variația în timp a componentelor neconstante ale vectorului viteză unghiulară, curba descrisă de versorul vitezei unghiulare fiind prezentată în figura 4.5.4d.

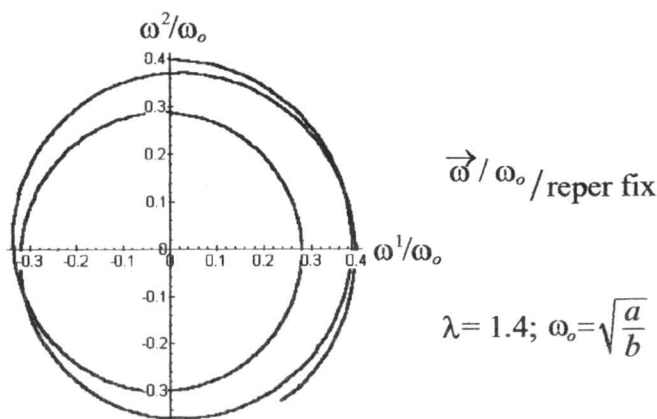


Figura 4.5.4d

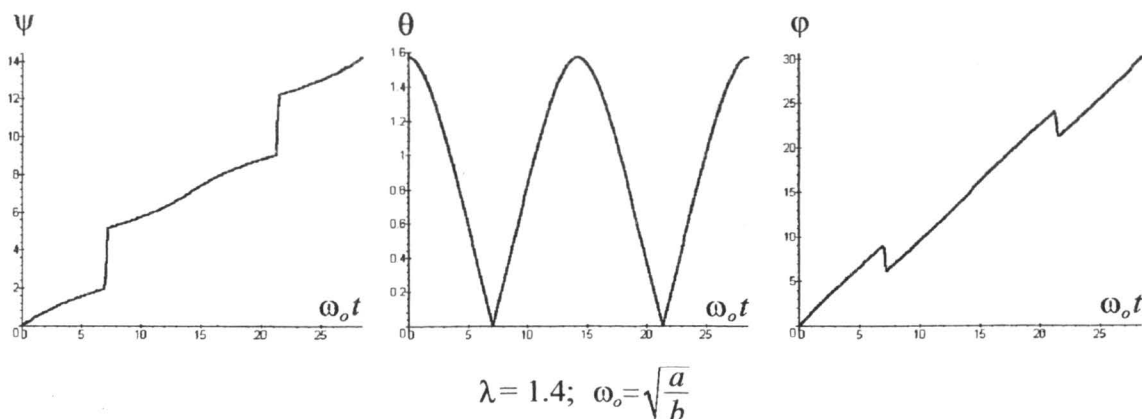


Figura 4.5.4e

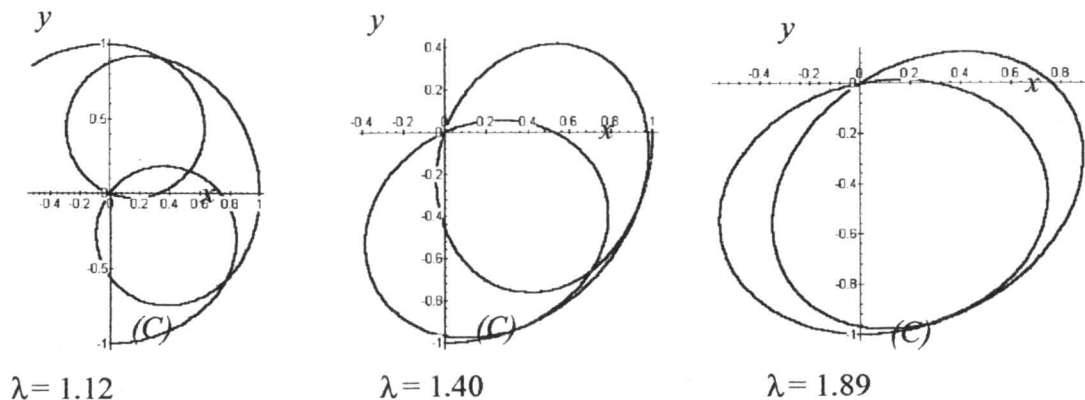


Figura 4.5.4f

Evoluția în timp a unghiurilor lui Euler este prezentată în figura 4.5.4e.

Curba (C) va fi tangentă la cercul de rază r și va trece prin centrul său. Exemple de porțiuni din asemenea curbe sunt prezentate în figura 4.5.4f, pentru valorile $\lambda = 1.12, 1.4, 1.89$.

Rezultatele din figurile 4.5.4b–4.5.4f s-au obținut utilizând programul

```
> with(plots): with(DEtools):
> lambda:=1.4: lb:=lambda: m:=35*lb:
> u1:=0: u2:=1: u3:=2*lb^2-1: k:=sqrt((u2-u1)/(u3-u1)): per:=evalf(14*LegendreKc(k)/sqrt(u3-u1)): pas:=per/100: dth:=2/7*sqrt(lb
> ^2-1):

per := 14.25231635
pas := .1425231635

> DEplot(49/2*diff(u(t),t$2)=3*u(t)^2-4*lb^2*u(t)+2*lb^2-1,[t,u],t=0..per,[0,0,0],stepsize=pas);
> l1:=DEplot(49/2*diff(theta(t),t$2)=sin(theta(t))*((1+cos(theta(t)))^2-2*lb^2)/(1+cos(theta(t)))^2,[t,theta],t=0..per/2,[0,Pi/2,0],ste
> psize=pas);
> l2:=DEplot(49/2*diff(theta(t),t$2)=sin(theta(t))*((1+cos(theta(t)))^2-2*lb^2)/(1+cos(theta(t)))^2,[t,theta],t=per/2..per,[per/2,0,dth]
> },stepsize=pas);
> display({l1,l2});
> sys:=49*diff(om1(t),t)-m*om2(t)=2*sin(theta(t))*cos(phi(t)),46*diff(om2(t),t)+m*om1(t)=-2*sin(theta(t))*sin(phi(t)),sin(theta(t))*dif
> f(psi(t),t)=om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)),diff(theta(t),t)=om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=lb*si
> n(theta(t))-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*cos(theta(t)),sin(theta(t))*diff(x(t),t)=(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*z(t)
> *x(t)-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*y(t),sin(theta(t))*diff(y(t),t)=(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*z(t)*y(t)+(om1(t)*si
> n(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*x(t),diff(z(t),t)=-(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*sin(theta(t));

sys := 49  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \text{om1}(t) \right) - 49.0 \text{om2}(t) = 2 \sin(\theta(t)) \cos(\phi(t))$ ,
46  $\left( \frac{\partial}{\partial t} \text{om2}(t) \right) + 49.0 \text{om1}(t) = -2 \sin(\theta(t)) \sin(\phi(t))$ ,  $\sin(\theta(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) \right) = \%2$ ,
 $\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \%1$ ,  $\sin(\theta(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \right) = 1.4 \sin(\theta(t)) - \%2 \cos(\theta(t))$ ,
 $\sin(\theta(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) = \%1 z(t) x(t) - \%2 y(t)$ ,
 $\sin(\theta(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) = \%1 z(t) y(t) + \%2 x(t)$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} z(t) = -\%1 \sin(\theta(t))$ 

%1 := om1(t) cos(phi(t)) - om2(t) sin(phi(t))
%2 := om1(t) sin(phi(t)) + om2(t) cos(phi(t))

> fcn:={om1(t),om2(t),psi(t),theta(t),phi(t),x(t),y(t),z(t)};
> om2o:=2*lb/7:
> p:=dsolve({sys,om1(0)=0,om2(0)=om2o,psi(0)=0,theta(0)=Pi/2,phi(0)=0,x(0)=0,y(0)=-1,z(0)=0},fcn,type=numeric);

p := proc(rkf45_x) ... end

> odeplot(p,[t,om1(t)],0..2*per,numpoints=200);
> odeplot(p,[t,om2(t)],0..2*per,numpoints=200);
> odeplot(p,[om1(t),om2(t),lb],0..per,numpoints=400,color=black,scaling=constrained,orientation=[-90,0]);
> odeplot(p,[t,psi(t)],0..2*per,numpoints=200);
> odeplot(p,[t,theta(t)],0..2*per,numpoints=200);
> odeplot(p,[t,phi(t)],0..2*per,numpoints=200);
> odeplot(p,[x(t),y(t),z(t)],0..2*per,numpoints=400,color=black,scaling=constrained,orientation=[-90,0]);
```

Pentru $(\omega_o^3)^2 = \frac{a}{b^2}$, ecuația diferențială devine

$$\dot{u}^2 = au(1-u)^2.$$

Dacă $u_o = 1$ ($\theta_o = 0$), nutația este staționară, axa Ox^3 coincide mereu cu axa OX^3 , aceasta nu corespunde cerinței problemei. Pentru $\theta_o \neq 0$ se obține

$$u = \left(\frac{k \exp(\sqrt{a} t) - 1}{k \exp(\sqrt{a} t) + 1} \right)^2 \quad \text{cu} \quad k = \frac{1 + \sqrt{u_o}}{1 - \sqrt{u_o}}.$$

Și pentru unghiurile lui Euler se pot obține expresii analitice (v. programul). Variația lor în timp este prezentată în figura 4.5.4g. Pentru viteza unghiulară în figura 4.5.4h.

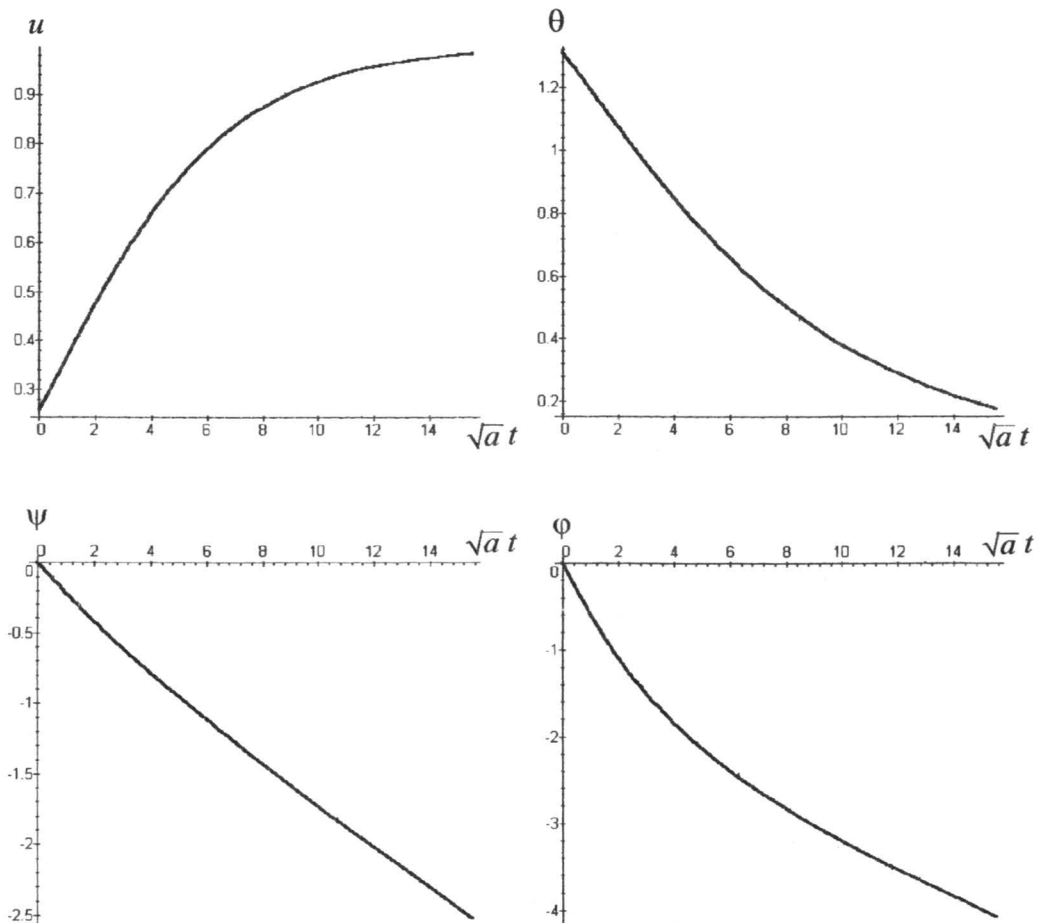


Figura 4.5.4g

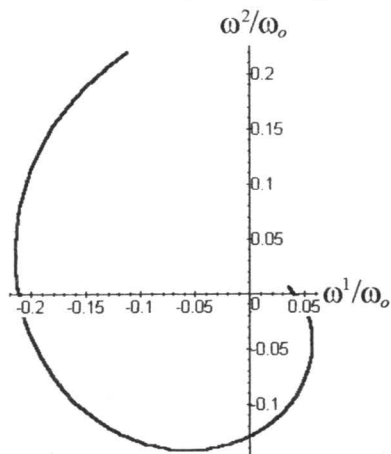


Figura 4.5.5h

Cum ψ variază tot timpul în același sens și

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u = 1,$$

curba (C) este un fel de spirală (fig.4.5.4i).

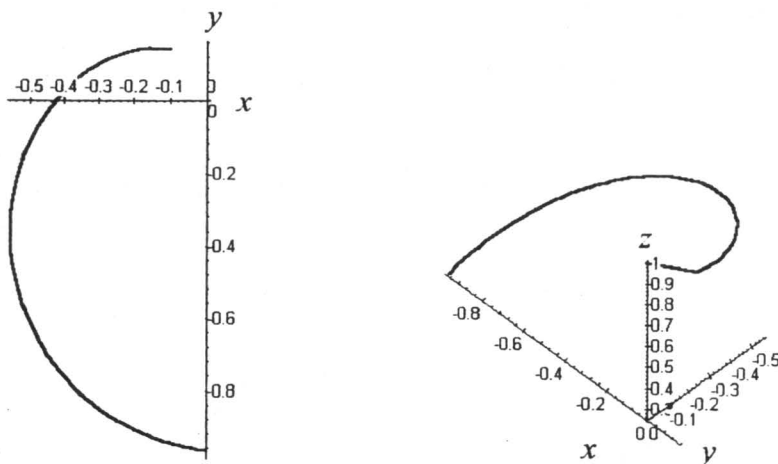


Figura 4.5.4i

Rezultatele din această a doua parte s-au obținut utilizând programul

```
> with(plots):
> thetao:=5*Pi/12;uo:=cos(thetao); co:=uo; so:=sin(thetao);
> int(7/2*sqrt(u)/(1-u),u);
7*arctanh(sqrt(u))

> timp:=proc(u) 7*arctanh(sqrt(u))-7*arctanh(sqrt(uo)) end;
> int(1/sqrt(u)/(1-u^2),u);
arctanh(sqrt(u)) - arctan(sqrt(u))

> upsi:=proc(u) arctanh(sqrt(uo))-arctanh(sqrt(u))+arctan(sqrt(uo))-arctan(sqrt(u)) end;
> int((7-5*u)/sqrt(u)/(1-u^2)/2,u);
arctanh(sqrt(u)) - 6*arctan(sqrt(u))

> uphi:=proc(u) arctanh(sqrt(uo))-arctanh(sqrt(u))+6*arctan(sqrt(uo))-6*arctan(sqrt(u)) end;
> utheta:=proc(u) arccos(u) end;
> plot([timp(u),u,u=uo..1],thickness=2);
> plot([timp(u),upsi(u),u=uo..1],thickness=2);
> plot([timp(u),utheta(u),u=uo..1],thickness=2);
> plot([timp(u),uphi(u),u=uo..1],thickness=2);
> om1:=proc(u) 2/7*sqrt((1-u)/(1+u))*(sin(uphi(u))-sqrt(u)*cos(uphi(u))) end;
> om2:=proc(u) 2/7*sqrt((1-u)/(1+u))*(cos(uphi(u))+sqrt(u)*sin(uphi(u))) end;
> plot([om1(u),om2(u),u=uo..1],color=black,thickness=2,scaling=constrained);
> ux:=proc(u) sqrt(1-u^2)*sin(upsi(u)) end; uy:=proc(u) -sqrt(1-u^2)*cos(upsi(u)) end;
> plot([ux(u),uy(u),u=uo..1],thickness=2,scaling=constrained);
> spacecurve([ux(u),uy(u),u],u=uo..1,thickness=2,scaling=constrained,color=black);
> ct:=(1+sqrt(uo))/(1-sqrt(uo)); f:=proc(t) ((ct*exp(3.5*t)-1)/(ct*exp(3.5*t)+1))^2 end;
> limit(f(t),t=infinity);

> plot([t,f(t),t=0..6]);
> limit(upsi(u),u=1);

> limit(uphi(u),u=1);
```

> limit(timp(u), u=1);

> limit(om1(u), u=1);

> limit(om2(u), u=1);

> limit(ux(u), u=1); limit(uy(u), u=1);

∞

0

0

0

0

4.5.5. Un corp solid rigid având un punct fix O este format dintr-o tijă OA și un disc circular, omogen greu, fixat de tijă astfel încât aceasta să fie perpendiculară pe disc în centrul său. Se neglijează masa tijei OA și dacă r este raza discului, $OA = r/2$. Masa discului este M .

Se cere mișcarea sistemului, știind că inițial discul se rotește în jurul lui OA cu viteza unghiulară $\omega_o = \sqrt{\frac{2g}{R}}$, în timp ce tija este plasată orizontal și lansată orizontal cu viteza ω_o . Să se determine locul punctului A.

Se alege referențialul inerțial astfel încât Ox^3 să fie verticala ascendentă. Reperul solidar legat cu sistemul rigid are axa Ox^3 în direcția OA. Momentele de inerție ale discului în raport cu centrul de masă A ($\zeta = \frac{r}{2}$) fiind $\frac{1}{4}Mr^2, \frac{1}{4}Mr^2, \frac{1}{2}Mr^2$, momentele de inerție în raport cu punctul fix vor fi

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{2}Mr^2.$$

Condițiile inițiale sunt

$$\theta_o = \frac{\pi}{2}, \varphi_o = 0, \psi_o = 0,$$

$$V_A^o = \omega_o(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3) \quad \text{cu} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{2g}{R}} \quad \text{sau} \quad \dot{\theta}_o = \dot{\varphi}_o = \omega_o, \dot{\psi}_o = 0.$$

Problema se încadrează în cazul Lagrange-Poisson, deci ca și la problemele 4.5.3 și 4.5.4 există următoarele integrale prime

– conservarea proiecției momentului cinetic după $\mathbf{t}_3$

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = \omega_o;$$

– conservarea proiecției vitezei unghiulare după $\mathbf{I}_3$

$$I(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = 0;$$

– conservarea energiei totale

$$I(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) = -Mgr \cos \theta + I\omega_o^2.$$

Eliminând $\dot{\psi}$ din ultimele două relații și notând $u = \cos \theta$, se obține ecuația diferențială a mișcării

$$\dot{u}^2 = P_3(u) \quad \text{cu} \quad P_3(u) = \omega_o^2[(1-u)^2(1+u) - u^2]$$

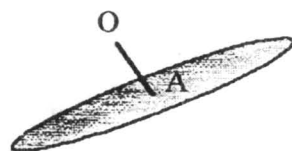


Figura 4.5.5a

polinom de gradul 3. Extinzând intervalul $[-1, +1]$ de variație a lui u corespunzătoare semnificației acestei variabile, la dreapta reală, se obține tabelul

u	$-\infty$	-1	u_1	0	u_2	1	u_3	$+\infty$
$P_3(u)$	-	-	-	0	+	0	-	+
				[		→		
				[	←	←	←	
				[	→			

Acest tabel arată că u va varia în intervalul $[u_1, u_2] \subset [-1, +1]$, în prima parte a mișcării crescând (presupunând $\omega_o > 0$) de la $u_o = 0$ la u_2 conform ecuației

$$\dot{u} = +\sqrt{P_3(u)},$$

după care descrește de la u_2 la u_1 conform ecuației

$$\dot{u} = -\sqrt{P_3(u)},$$

urmând din nou o creștere de la u_1 la u_2 ș.a.m.d. Corespunzător θ mai întâi va descrește de la $\theta_o = \frac{\pi}{2}$ la θ_2 ($u_2 = \cos \theta_2$), apoi va crește de la θ_2 la θ_1 ș.a.m.d.

Cu o nouă schimbare de variabilă

$$u = u_1 + z^2(u_2 - u_1), \quad z \in [0, 1],$$

$$u = u_1 \Rightarrow z = 0, \quad u = u_2 \Rightarrow z = 1,$$

rezolvarea problemei revine la utilizarea integralelor eliptice

$$\omega_o t \sqrt{u_3 - u_1} = \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

cu

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} < 1.$$

Perioada mișcării este

$$\tau = \frac{4}{\omega_o \sqrt{u_3 - u_1}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

După determinarea lui θ ca funcție de timp, ψ și ϕ rezultă prin cuadraturi din relațiile

$$\dot{\psi} = -\omega_o \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \dot{\phi} = \omega_o \frac{1}{\sin^2 \theta}.$$

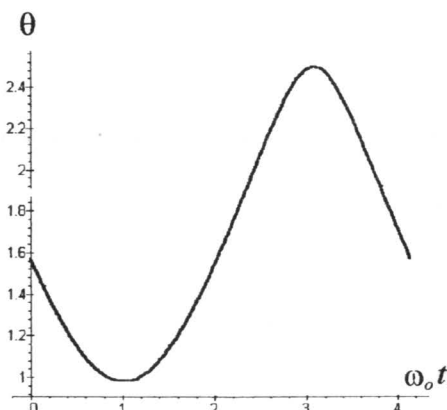
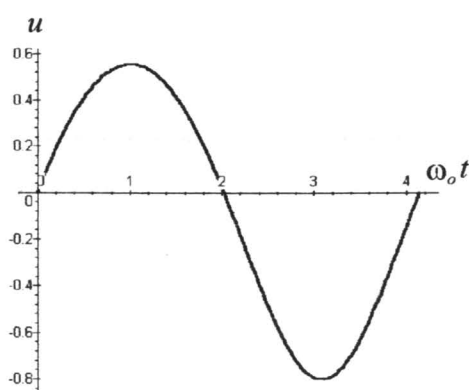


Figura 4.5.5.b

În figura 4.5.5b este prezentată variația în timp a variabilei auxiliare u și a unghiului de nutație θ (obținută prin integrarea ecuațiilor diferențiale corespunzătoare de ordinul al doilea).

Variația componentelor neconstante ale vectorului viteză unghiulară este redată în figura 4.5.5c, iar cea a vectorului ω în figura 4.5.5e. Unghiurile Euler sunt prezentate în figura 4.5.5d.

Punctul A va descrie pe sfera cu centrul în O o curbă cuprinsă între cercurile $\theta = \theta_1$ și $\theta = \theta_2$ ($\theta_2 < \theta_1$) (figura 4.5.5f).

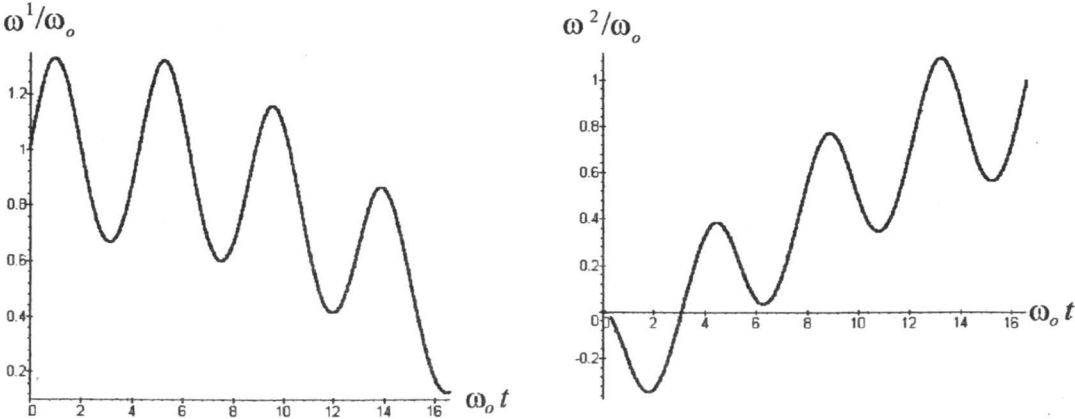


Figura 4.5.5c

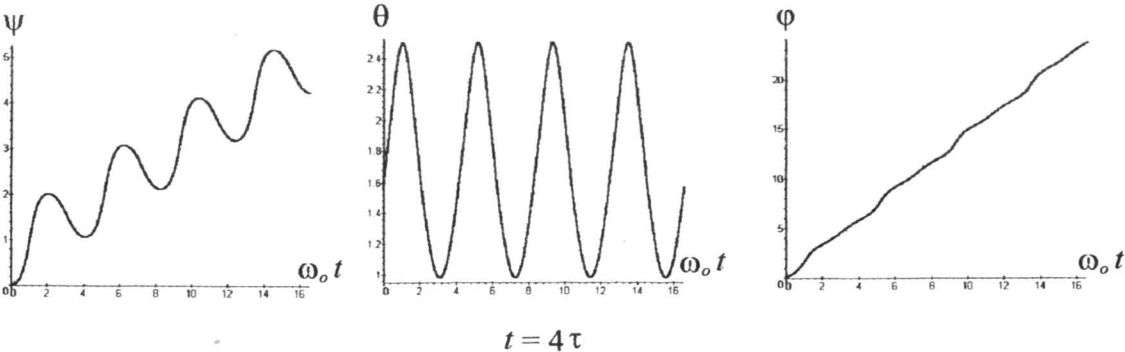


Figura 4.5.5d

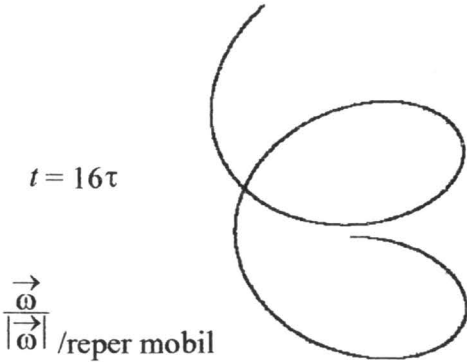
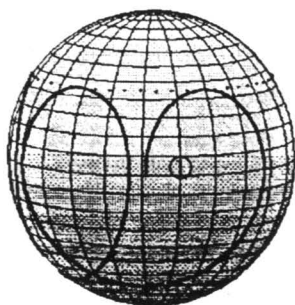


Figura 4.5.5e



l_3 / reper fix

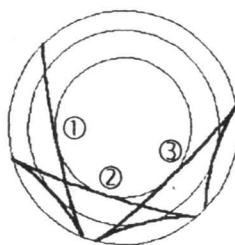


Figura 4.5.5f

Programul utilizat a fost următorul

```
> with(plots): with(DEtools):
> pol3:=(1-u)^2*(1+u)-u^2:
> u1:=fsolve(pol3,u,-1..0);

u1 := -.8019377358

> u2:=fsolve(pol3,u,0..1);

u2 := .5549581321

> u3:=fsolve(pol3,u,1..4);

u3 := 2.246979604

> k:=sqrt((u2-u1)/(u3-u1)): per:=evalf(4/sqrt(u3-u1)*LegendreKc(k)); pas:=per/100;

per := 4.146619813
```

Integrarea ecuatiilor diferentiale pentru variabila u si unghiul de nutatie

```
> DEplot(2*diff(om(t),t)$2=3*u^2-4*u-1,[t,u],t=0..per,[0,0,1],stepsize=pas);
> DEplot(2*sin(theta(t))^3*diff(theta(t),t)$2=cos(theta(t))^4-2*cos(theta(t))^2+2*cos(theta(t))+1,[t,theta],t=0..per,[0,Pi/2,-1],steps
> ize=pas);
> tt1:=arccos(u1); tt2:=arccos(u2);
```

Integrarea sistemului complex pentru componentele vectorului viteza unghiulara in raport cu reperul mobil, unghiurile lui Euler si componentele versorului axei de simetrie in raport cu reperul fix

```
> sys:=2*diff(om1(t),t)=sin(theta(t))*cos(phi(t)),2*diff(om2(t),t)=-sin(theta(t))*sin(phi(t)),sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=om1(t)*sin(phi(t))+
> om2(t)*cos(phi(t)),diff(theta(t),t)=om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=sin(theta(t))*(-om1(t)*sin(phi(t))+o
> m2(t)*cos(phi(t)))*cos(theta(t)),sin(theta(t))*diff(x(t),t)=(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*cos(theta(t))*x(t)-(om1(t)*sin(phi(t))
> +om2(t)*cos(phi(t)))*y(t),sin(theta(t))*diff(y(t),t)=(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*cos(theta(t))*y(t)+(om1(t)*sin(phi(t))+om2
> (t)*cos(phi(t)))*x(t),diff(z(t),t)=-om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t))*sin(theta(t));
> fcns:={om1(t),om2(t),psi(t),theta(t),phi(t),x(t),y(t),z(t)}:
> p:=dsolve({sys,om1(0)=1,om2(0)=0,psi(0)=0,theta(0)=Pi/2,phi(0)=0,x(0)=0,y(0)=-1,z(0)=0},fcns,type=numeric);
> cdeplot(p,[t,om1(t)],0..4*per,numpoints=1000);
> cdeplot(p,[t,om2(t)],0..4*per,numpoints=1000);
> cdeplot(p,[t,psi(t)],0..4*per,numpoints=1000);
> cdeplot(p,[t,theta(t)],0..4*per,numpoints=1000);
> cdeplot(p,[t,phi(t)],0..4*per,numpoints=1000);
> cdeplot(p,[om1(t),om2(t)],1,0..16*per,numpoints=8000,color=black,thickness=2,scaling=constrained,orientation=[-90,0]);
> cp:=odeplot(p,[x(t),y(t)],0,0..6*per,numpoints=1500,color=black,thickness=2);
> cs:=odeplot(p,[x(t),y(t),z(t)],0,0..6*per,numpoints=1500,color=black,thickness=2);
> sfera:=plot3d([sin(w)*cos(v),sin(w)*sin(v),cos(w)],w=0..Pi,v=0..2*Pi);
> r1:=sqrt(1-u1^2); paral1:=spacecurve([r1*cos(v),r1*sin(v),u1],v=0..2*Pi,style=point,color=black); paral11:=spacecurve([r1*cos
> (v),r1*sin(v),u1],v=0..2*Pi,color=black);
> r2:=sqrt(1-u2^2); paral2:=spacecurve([r2*cos(v),r2*sin(v),u2],v=0..2*Pi,style=point,color=black); paral21:=spacecurve([r2*cos
> (v),r2*sin(v),u2],v=0..2*Pi,color=black);
> paral3:=spacecurve([cos(v),sin(v),u2],v=0..2*Pi,color=black);
> display({cs,sfera,paral1,paral2},scaling=constrained,orientation=[94,83]);
> display({cp,paral11,paral21,paral3},scaling=constrained,orientation=[45,0]);
```

4.5.6. Un octaedru regulat, omogen, de masă M , de muchie $a\sqrt{2}$, se rotește în jurul unuia dintre vârfurile sale O , care este fix. Vârful S , opus lui O , este atras de un punct fix P , $OP = 4a$, cu o forță de atracție de mărime $M\omega_o^2 \frac{a^4}{3(SP)^3}$.

La momentul $t = 0$, octaedrul se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei instantanee de rotație OS și unghiul POS este drept.

Să se determine mișcarea octaedrului și în particular să se vadă care este traiectoria punctului S .

Referențialul inerțial este ales astfel încât axa OX^3 să treacă prin punctul P . Reperul solidar cu rigidul are axa Ox^3 orientat după OS , axele Ox^1 , Ox^2 se iau în plan perpendicular pe OS , paralele cu axe ce trec prin centrul de masă C și două vârfuri alăturate, diferite de O și S . Astfel poziția punctelor S respectiv P și C sunt precizate prin

$$\overrightarrow{OS} = 2a \mathbf{1}_3, \quad \overrightarrow{OP} = 4a \mathbf{1}_3, \quad \overrightarrow{OC} = a \mathbf{1}_3.$$

Momentele centrale principale de inerție fiind

$$I_{C1} = I_{C2} = I_{C3} = \frac{1}{5}Ma^2,$$

momentele principale de inerție în raport cu O vor fi

$$I_1 = I_2 = \frac{6}{5}Ma^2, I_3 = \frac{1}{5}Ma^2.$$

În raport cu reperele precizate, condițiile inițiale se scriu

$$\theta_o = \frac{\pi}{2}, \psi_o = \varphi_o = 0,$$

$$\omega^o = \omega \mathbf{1}_3 \quad \text{sau} \quad \dot{\psi}_o = \dot{\theta}_o = 0, \dot{\varphi}_o = \omega.$$

Momentul forței ce acționează în S rezultă

$$\mathbf{M}_O = \frac{1}{6} \frac{M\omega_o^2 a^2}{(5 - 4 \cos \theta)^2} \mathbf{1}_3 \times \mathbf{I}_3 \quad \left(\overrightarrow{SP} = 4a \mathbf{1}_3 - 2a \mathbf{1}_3, SP = 2a \sqrt{5 - 4 \cos \theta} \right)$$

se explicitează

$$\mathbf{M}_O = \frac{1}{6} \frac{M\omega_o^2 a^2}{(5 - 4 \cos \theta)^2} \mathbf{1}_3 \times \mathbf{I}_3.$$

Principiul de bilanț al momentului cinetic

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{M}_O$$

și teorema de bilanț al energiei

$$\frac{d}{dt}(\omega \cdot \mathbf{I}\omega) = 2\omega \cdot \mathbf{M}_O$$

conduc la integralele prime

– conservarea proiecției vitezei unghiulare după $\mathbf{1}_3$ ($I_1 = I_2$)

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = \omega;$$

– conservarea proiecției momentului cinetic după $\mathbf{I}_3$

$$I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 \omega \cos \theta = 0;$$

– conservarea energiei totale

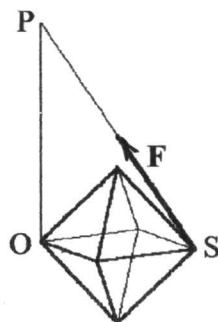


Figura 4.5.6a

$$I_1(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) = \frac{1}{15} \cdot \frac{M\omega^2 a^2 \cos \theta}{5 - 4 \cos \theta}.$$

Notând ca și în problemele precedente

$$u = \cos \theta$$

se obține ecuația diferențială a mișcării

$$\dot{u}^2 = \frac{\omega_o^2}{36} \cdot \frac{u(u-2)(2u-1)}{5-4u}.$$

tabelul de variație al funcției raționale din membrul drept

u	$-\infty$	-1	$u_o=0$	0.5	1	1.25	2	$+\infty$
u	-	-	0	+	+	+	+	+
$u-2$	-	-	-	-	-	-	0	+
$2u-1$	-	-	-	0	+	+	+	+
$5-4u$	+	+	+	+	+	0	-	-
$R(u)$	-	-	0	0	-	-	+	0

[→]

[←]

indică integrarea pe intervalul $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset [-1, 1]$. Variabila u va crește de la valoarea inițială $u_o = 0$ la valoarea finală $u_f = 0.5$, după care va parcurge același interval dar în sens invers ș.a.m.d. Corespunzător unghiul θ va parcurge intervalul $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$, întâi de la dreapta la stânga, apoi de la stânga la dreapta ș.a.m.d. Perioada mișcării este

$$\tau = \frac{12}{\omega_o} \int_0^{0.5} \sqrt{\frac{5-4u}{u(u-2)(2u-1)}} du.$$

Ca și în problemele precedente s-au realizat următoarele reprezentări: variația în timp a variabilei auxiliare u și a unghiului de nutație în figura 4.5.5b, variația în timp a componentelor neconstante ale vectorului viteză unghiulară în figura 4.5.5c, variația în timp a unghiurilor lui Euler în figura 4.5.5d, curba descrisă de versorul vitezei unghiulare în raport cu reperul solidar cu rigidul în figura 4.5.5e, traiectoria descrisă de punctul S (analogă curbei descrise de extremitatea versorului $\mathbf{t}_3$ în raport cu reperul inerțial în figura 4.5.5f).

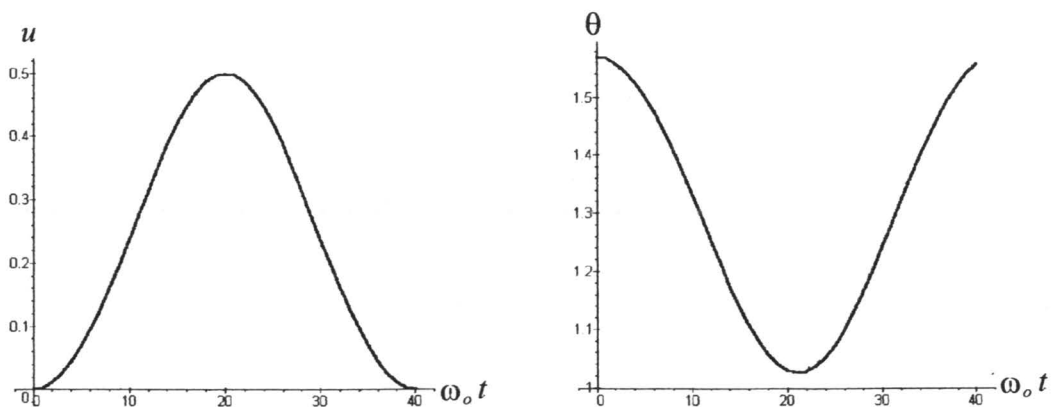


Figura 4.5.6b

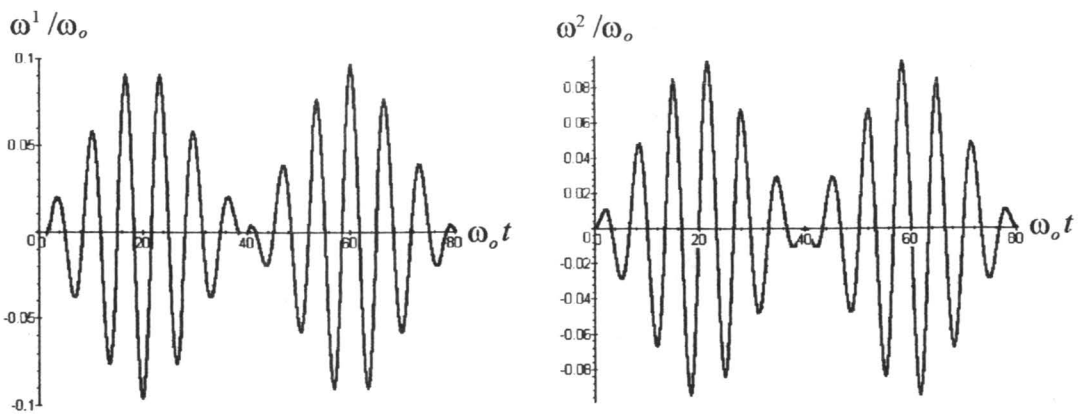


Figura 4.5.6c

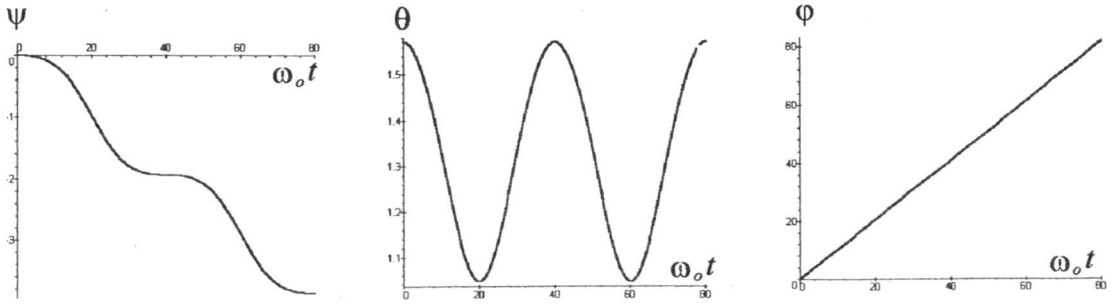


Figura 4.5.6d

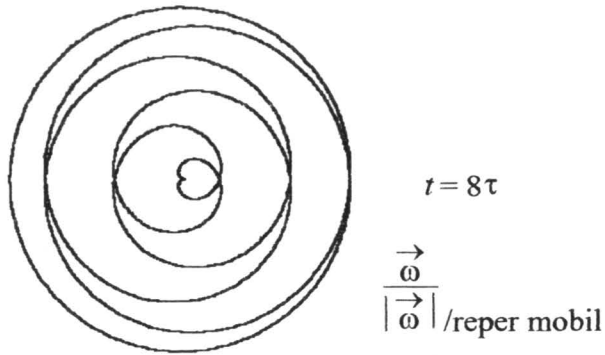


Figura 4.5.6e

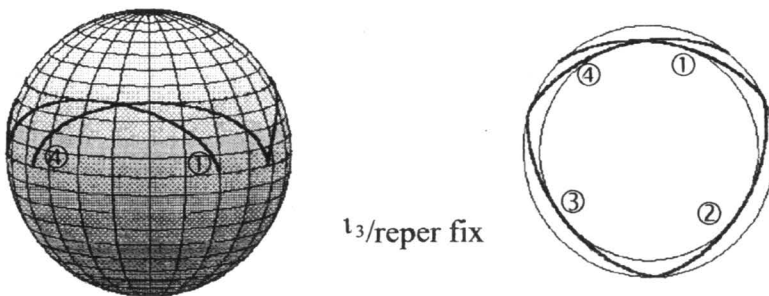


Figura 4.5.6f

Pentru reprezentările din figurile 4.5.5b–4.5.5f s-a utilizat programul

> with(plots): with(DEtools):

> per:=int(12*sqrt((5-4*u)/u/(u-2)/(2*u-1)),u=0.0000000000001..0.499999999999999); per:=evalf(per);

per := 40.11452174

Integrarea ecuațiilor pentru variabila u și unghiul de nutație

> DEplot(36*diff(u(t),t\$2)=(5-25*u+25*u^2-8*u^3)/(5-4*u^2,t,u),t=0..per,{[0,0,0]},stepsize=1);

> DEplot(36*sin(theta(t))*diff(theta(t),t\$2)=-(5*cos(theta(t))^4-16*cos(theta(t))^3+30*cos(theta(t))^2-25*cos(theta(t))+5)/(5-4*cos(theta(t))^2,t,theta),t=0..per,{[0,Pi/2,0]},stepsize=1);

Integrarea sistemului complex pentru componentele vectorului viteza unghiulară în raport cu reperul mobil, unghiurile lui Euler și componentele versorului axei de simetrie în raport cu reperul fix

> sys:=36*diff(om1(t),t)-30*om2(t)=-5*sin(theta(t))*cos(phi(t))/(5-4*cos(theta(t)))^2,36*diff(om2(t),t)+30*om1(t)=5*sin(theta(t))*sin(phi(t))/(5-4*cos(theta(t)))^2,sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)),diff(theta(t),t)=om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=sin(theta(t))-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*cos(theta(t)),sin(theta(t))*diff(x(t),t)=(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*cos(theta(t))*x(t)-(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*y(t),sin(theta(t))*diff(y(t),t)=(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*cos(theta(t))*y(t)+(om1(t)*sin(phi(t))+om2(t)*cos(phi(t)))*x(t),diff(z(t),t)=-(om1(t)*cos(phi(t))-om2(t)*sin(phi(t)))*sin(theta(t));

> fcns:={om1(t),om2(t),psi(t),theta(t),phi(t),x(t),y(t),z(t)};

> p:=dsolve({sys,om1(0)=0,om2(0)=0,psi(0)=0,theta(0)=Pi/2,phi(0)=0,x(0)=0,y(0)=-1,z(0)=0},fcns,type=numeric);

> odeplot(p,[t,om1(t)],0..per,numpoints=100);

> odeplot(p,[t,om2(t)],0..per,numpoints=100);

> odeplot(p,[t,psi(t)],0..per,numpoints=100);

> odeplot(p,[t,theta(t)],0..per,numpoints=100);

> odeplot(p,[t,phi(t)],0..per,numpoints=100);

> odeplot(p,[100*om1(t),100*om2(t),100],0..2*per,numpoints=4000,color=black,thickness=2,scaling=constrained,orientation=[-90,0]);

> odeplot(p,[3*om1(t)*sqrt(10-8*cos(theta(t))),3*om2(t)*sqrt(10-8*cos(theta(t))),0..per];

> cs:=odeplot(p,[x(t),y(t),z(t)],0..4*per,numpoints=600,color=black,thickness=2);

> paral:=spacecurve([cos(v),sin(v),0],v=0..2*Pi,style=point,color=black); paral1:=spacecurve([cos(v),sin(v),0],v=0..2*Pi,color=black);

> r2:=sqrt(1-0.5^2); paral2:=spacecurve([r2*cos(v),r2*sin(v),0.5],v=0..2*Pi,style=point,color=black); paral21:=spacecurve([r2*cos(v),r2*sin(v),0.5],v=0..2*Pi,color=black);

> sfera:=plot3d([sin(u)*cos(v),sin(u)*sin(v),cos(u)],u=0..Pi,v=0..2*Pi);

> display({cs,sfera,paral1,paral2},scaling=constrained,orientation=[-120,80]);

> display({cs,paral11,paral21},scaling=constrained,orientation=[45,0]);

4.5.7. Particulele unui corp solid rigid sunt atrase de un plan fix proporțional cu distanța. Să se studieze mișcarea, știind că rigidul are un punct fix în planul care exercită atracția (Brun).

Fie referențialul inerțial $OX^1X^2X^3$ ales cu originea în punctul fix O și cu OX^1X^2 planul care atrage particulele rigidului. Reperul solidar cu rigidul este determinat de axele principale de inerție prin punctul O .

Momentul rezultant în raport cu punctul O va fi

$$\mathbf{M}_O = \iiint_{D_O} \mathbf{x} \times (-\lambda^2 X^3 \mathbf{I}_3) d\mathbf{m} = \iiint_{D_O} (x^j \mathbf{e}_j) \times [-\lambda^2 (x^k \gamma_k) (\gamma^l \mathbf{e}_l)] d\mathbf{m} =$$

$$= -\lambda^2 [(I_3 - I_2) \gamma^2 \gamma^3 \mathbf{e}_1 + (I_1 - I_3) \gamma^1 \gamma^3 \mathbf{e}_2 + (I_2 - I_1) \gamma^2 \gamma^1 \mathbf{e}_3],$$

$$\gamma^1 = \sin \theta \sin \varphi, \gamma^2 = \sin \theta \cos \varphi, \gamma^3 = \cos \theta.$$

În consecință sistemul de ecuații Euler este în acest caz

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}^1 + (I_3 - I_2) \omega^2 \omega^3 = -\lambda^2 (I_3 - I_2) \gamma^2 \gamma^3, \\ I_2 \dot{\omega}^2 + (I_1 - I_3) \omega^3 \omega^1 = -\lambda^2 (I_1 - I_3) \gamma^3 \gamma^1, \\ I_3 \dot{\omega}^3 + (I_2 - I_1) \omega^1 \omega^2 = -\lambda^2 (I_2 - I_1) \gamma^1 \gamma^2, \end{cases} \quad (*)$$

care se va asocia cu sistemul privind componentele versorului $\mathbf{I}_3$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^1 + \omega^2 \gamma^3 - \omega^3 \gamma^2 = 0, \\ \dot{\gamma}^2 + \omega^3 \gamma^1 - \omega^1 \gamma^3 = 0, \\ \dot{\gamma}^3 + \omega^1 \gamma^2 - \omega^2 \gamma^1 = 0. \end{cases} \quad (**)$$

Sistemul admite următoarele patru integrale prime

– mărimea constantă a versorului $\mathbf{I}_3$

$$(\gamma^1)^2 + (\gamma^2)^2 + (\gamma^3)^2 = 1;$$

– conservarea energiei

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} \right) &= P, \\ P = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_O &= \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{\lambda^2}{2} [I_1 (\gamma^1)^2 + I_2 (\gamma^2)^2 + I_3 (\gamma^3)^2] \right\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow & [I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2] + \lambda^2 [I_1 (\gamma^1)^2 + I_2 (\gamma^2)^2 + I_3 (\gamma^3)^2] = \text{const.}; \end{aligned}$$

– conservarea momentului cinetic după direcția $\mathbf{I}_3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{M}_O \Big| \cdot \mathbf{I}_3; \mathbf{I}_3 \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) = 0 \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow \\ I_1 \omega^1 \gamma^1 + I_2 \omega^2 \gamma^2 + I_3 \omega^3 \gamma^3 &= \text{const.}; \end{aligned}$$

– încă o integrală primă

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{M}_O \Big| \cdot \mathbf{K}_O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}, \\ (\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega})^2 &= I_1 (\omega^1)^2 + I_2 (\omega^2)^2 + I_3 (\omega^3)^2, \\ \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega} &= \dots = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\lambda^2}{2} [I_2 I_3 (\gamma^1)^2 + I_3 I_1 (\gamma^2)^2 + I_1 I_2 (\gamma^3)^2] \right\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow & I_1^2 (\omega^1)^2 + I_2^2 (\omega^2)^2 + I_3^2 (\omega^3)^2 - \lambda^2 [I_2 I_3 (\gamma^1)^2 + I_3 I_1 (\gamma^2)^2 + I_1 I_2 (\gamma^3)^2] = \text{const.} \end{aligned}$$

Cele patru integrale prime sunt suficiente pentru a reduce rezolvarea sistemului autonom (*)+(**) la cuadraturi (teoria ultimului multiplicator).

§ 4.6 Mișcarea plan-paralelă

Mișcarea plan-paralelă este mișcarea solidului rigid pentru care o secțiune plană prin solidul rigid este obligată să rămână mereu într-un plan fix. Consecință a condiției impuse mișcării este faptul că orice secțiune plană prin solidul rigid, paralelă cu secțiunea considerată rămâne într-un plan paralel cu planul fix. Aceasta permite alegerea reperului inerțial $OX^1X^2X^3$ cu planul OX^1X^2 , paralel cu planul fix considerat trecând printr-un punct ales "o" al solidului rigid, iar reperul solidar cu rigidul $ox^1x^2x^3$ ales astfel încât planul ox^1x^2 să coincidă cu planul OX^1X^2 . Poziția solidului rigid este caracterizată prin coordonatele din planul OX^1X^2 ale punctului "o" și de unghiul φ pe care îl face axa ox^1 cu OX^1

$$\mathbf{X}_o = \xi \mathbf{I}_1 + \eta \mathbf{I}_2,$$

$$\theta = \psi = 0, \mathbf{I}_3 = \mathbf{i}_3, \omega = \omega \mathbf{I}_3 = \dot{\varphi} \mathbf{i}_3,$$

Mișcarea corpului va fi obținută din teorema de mișcare a centrului de masă și din teorema momentului cinetic în raport cu punctul "o".

4.6.1. O bară omogenă grea AB, de masă M , obligată să rămână într-un plan vertical fix, este legată de un punct fix O printr-un fir flexibil, inextensibil, de masă neglijabilă, de lungime l , care este atașat de mijlocul ei C. Să se studieze mișcarea barei și să se determine tensiunea în fir.

Reperul inerțial $OX^1X^2X^3$ este ales astfel încât OX^1X^2 este planul vertical fix, OX^1 verticală descendentă. Reperul solidar cu bara $Cx^1x^2x^3$ ($C \equiv o$) este astfel încât planul Cx^1x^2 coincide cu OX^1X^2 , axa Cx^1 are direcția barei AB.

La condiția de mișcare plan-paralelă se adaugă condiția de legătură

$$\xi^2 + \eta^2 = l^2.$$

Fie $\alpha = \angle(OX^1, OC)$. Atunci

$$\xi = \cos \alpha, \eta = l \sin \alpha.$$

Forțele care acționează asupra barei sunt greutatea $M\mathbf{g}$ aplicată în C, tensiunea $\mathbf{T}$ în firul OC dirijată după această direcție în spre O. Rezultanta forțelor de legătură pentru menținerea barei în plan vertical sunt dirijate după normala (orizontală) la plan, dar nu va interveni în descrierea mișcării.

Teorema de mișcare a centrului de masă

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = M\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{N},$$

utilizând proiecția pe axele reperului inerțial din planul vertical, conduce la

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} = Mg - T \cos \alpha, \\ M\ddot{\eta} = -T \sin \alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -Ml(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha) = Mg - T \cos \alpha, \\ Ml(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha) = -T \sin \alpha, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0, \\ T = Mg \cos \alpha + Ml\dot{\alpha}^2 = Mg(3 \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0). \end{cases}$$

Aceste relații sunt cele cunoscute din teoria pendulului matematic (v.[25], problema 3.6.1).

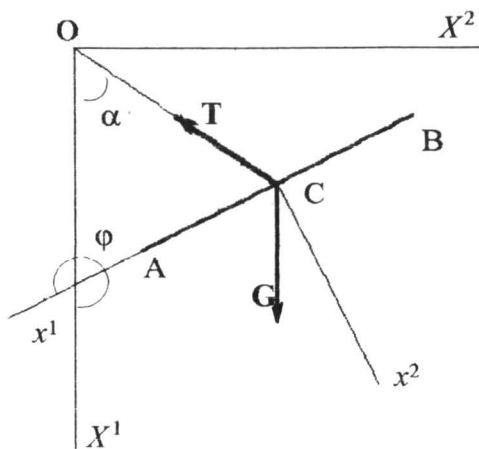


Figura 4.6.1a

Teorema de mișcare în jurul centrului de masă

$$\frac{d}{dt}(I_C \omega) = 0,$$

utilizând proiecția pe normala la planul vertical, conduce la

$$I_3 \ddot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \varphi_o + \dot{\varphi}_o t \quad (\varphi_o, \dot{\varphi}_o - \text{constante})$$

$$\left(I_C = I_3 \mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3, \quad I_3 = \int_{-a}^a \rho_o u^2 du = \frac{2}{3} \rho_o a^3 = \frac{1}{3} M a^2 > 0 \right).$$

Bara are o rotație uniformă în planul vertical considerat, în jurul centrului său de masă C.

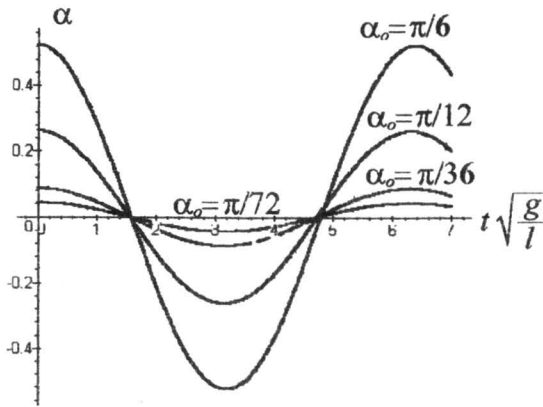


Figura 4.6.1b

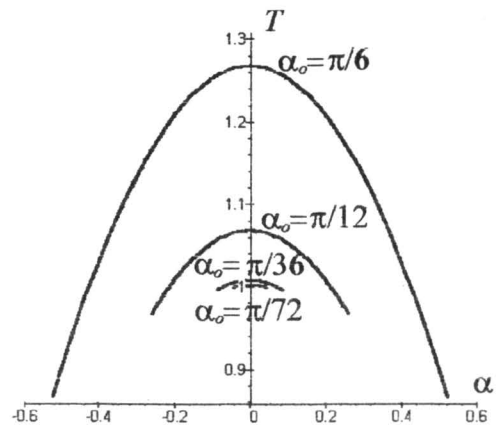


Figura 4.6.1c

În figura 4.6.1b s-a reprezentat variația unghiului α pentru câteva date inițiale; pentru aceleași date inițiale, în figura 4.6.1c s-a reprezentat variația tensiunii în fir T ca funcție de unghiul α (poziția centrului barei).

4.6.2. O scară omogenă grea AB de lungime $2a$ și de masă M , alunecă fără frecare având capătul A pe un plan orizontal și capătul B pe un perete vertical. Să se studieze mișcarea fără viteză inițială.

Se alege în planul vertical al mișcării, reperul inerțial OX^1X^2 cu OX^2 verticală ascendentă. Reperul solidar cu scara Cx^1x^2 are originea în centrul de masă C și Cx^1 în direcția AB (fig.4.6.2). Fie α unghiul scării cu planul orizontal

$$\alpha = \angle OAB.$$

Asupra corpului acționează greutatea Mg în C și forțele de legătură N_A în A și N_B în B. Punctele A, B, C au coordonatele

$$C(\xi, \eta), A(2\xi, 0), B(0, 2\eta),$$

$$\text{cu } \begin{cases} \xi = a \cos \alpha, \\ \eta = a \sin \alpha. \end{cases}$$

Mișcarea solidului rigid și forțele de legătură se obțin din teorema de mișcare a centrului de masă

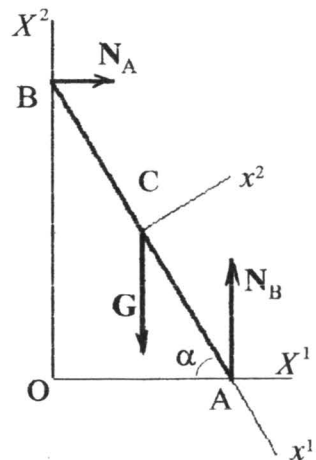


Figura 4.6.2a

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = M\mathbf{g} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B \Leftrightarrow \begin{cases} M\ddot{\xi} = N_B, \\ M\ddot{\eta} = N_A - Mg, \end{cases}$$

și din teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă ($\varphi = 2\pi - \alpha$)

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}) = \overrightarrow{CA} \times \mathbf{N}_A + \overrightarrow{CB} \times \mathbf{N}_B \Leftrightarrow -I_3\ddot{\alpha} = aN_A \cos \alpha - aN_B \sin \alpha \quad \left(I_3 = \frac{1}{3}Ma^2\right).$$

Eliminând forțele de legătură

$$\begin{cases} N_A = Mg + Ma(\ddot{\alpha} \cos \alpha - \dot{\alpha}^2 \sin \alpha), \\ N_B = -Ma(\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha), \end{cases}$$

se obține ecuația diferențială pentru unghiul α

$$\ddot{\alpha} + \frac{3}{4} \frac{g}{a} \cos \alpha = 0,$$

care integrată cu condiții inițiale nule dă

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{a} (\sin \alpha_o - \sin \alpha),$$

relație echivalentă cu integrala primă corespunzând conservării energiei totale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \right) &= M \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_C + \underbrace{\mathbf{N}_A \cdot \mathbf{V}_A}_{=0(\perp)} + \underbrace{\mathbf{N}_B \cdot \mathbf{V}_B}_{=(\perp)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Ma^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} Ma^2 \dot{\alpha}^2 \right) &= \frac{d}{dt} (-Mga \sin \alpha) \Leftrightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{a} (\sin \alpha_o - \sin \alpha). \end{aligned}$$

Pentru forțele de legătură N_A , N_B se obțin expresiile

$$\begin{cases} N_A = Mg \left(\frac{9}{4} \sin^2 \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \sin \alpha_o + \frac{1}{4} \right), \\ N_B = Mg \cos \alpha \left(\frac{9}{4} \sin \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha_o \right). \end{cases}$$

În figura 4.6.2b s-a reprezentat variația unghiului α pentru câteva date inițiale, iar în figura 4.6.2c variația reacțiunilor normale N_A , N_B în funcție de poziția barei (unghiul α) pentru aceleași date inițiale.

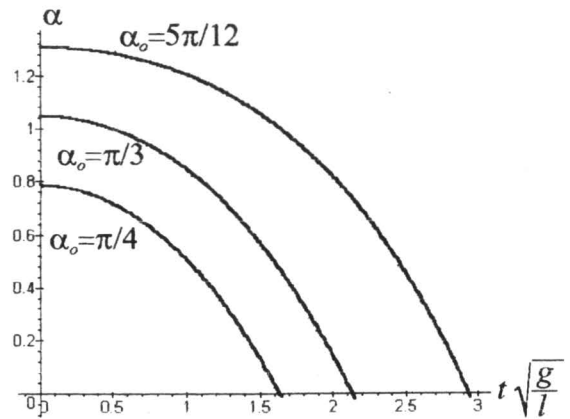


Figura 4.6.2b

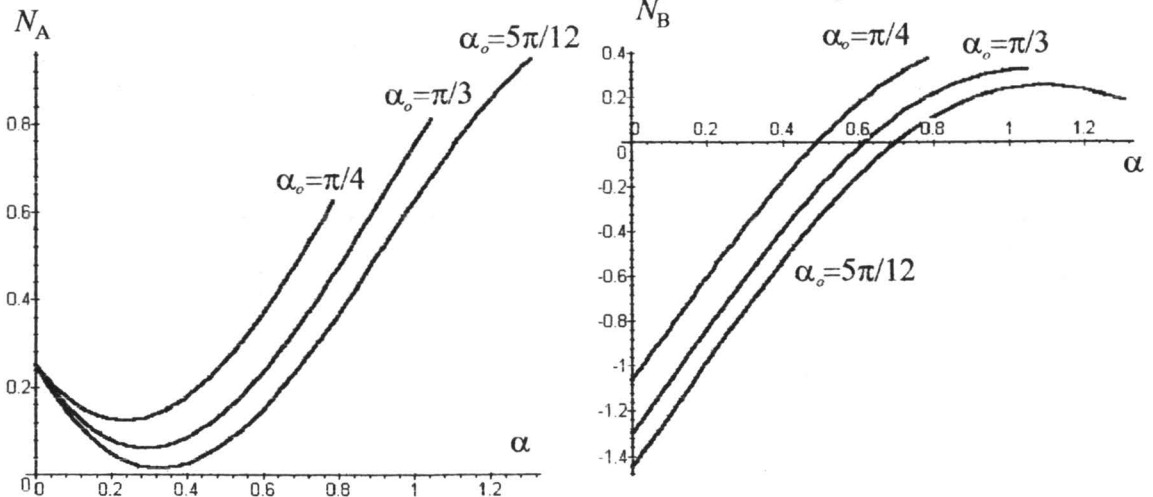


Figura 4.6.2c

4.6.3. O bară omogenă grea AB de lungime $2a$ și masă M , este trasă, în plan vertical, pe un plan înclinat față de orizontală cu unghiul α , prin intermediul unei greutateți Q legată printr-un fir peste un scripete și legat la capătul B. Inițial bara este orizontală, cu capătul B la baza planului înclinat. Să se studieze mișcarea.

În plan vertical, reperul inerțial OX^1X^2 este ales cu originea în poziția inițială a capătului A și OX^1 orizontal. Reperul solidar cu bara Cx^1x^2 are originea în centrul de masă al barei și Cx^1 în lungul barei. Poziția barei este caracterizată prin unghiul

$$\varphi = \angle BAO_1.$$

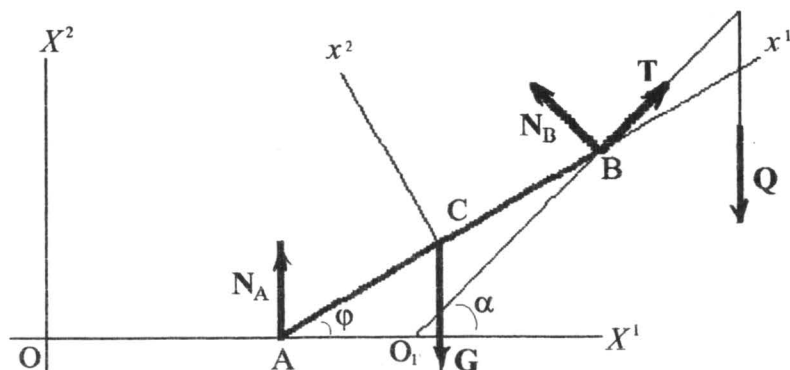


Figura 4.6.3a

Asupra barei acționează greutatea Mg în centrul de masă C, tensiunea în fir T în B

$$\mathbf{T} = \left(Q - \frac{Q}{g} \ddot{s} \right) (\cos \alpha \mathbf{t}_1 + \sin \alpha \mathbf{t}_2), \quad s = 2a \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha},$$

forțele de legătură N_A în A și N_B în B

$$\begin{cases} \mathbf{N}_A = N_A \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{N}_B = N_B (-\sin \alpha \mathbf{t}_1 + \cos \alpha \mathbf{t}_2). \end{cases}$$

Poziția punctelor de aplicație a forțelor este dată de

$$C(\xi, \eta) \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \xi = 2a + 2a \sin \varphi \operatorname{ctg} \alpha - a \cos \varphi, \\ \eta = a \sin \varphi, \end{cases}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} = -a(\cos \varphi \mathbf{t}_1 + \sin \varphi \mathbf{t}_2).$$

Mișcarea barei și forțele de legătură se obțin din teorema de mișcare a centrului de masă

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = M\mathbf{g} + \mathbf{T} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B \Leftrightarrow \begin{cases} M\ddot{\xi} = T \cos \alpha - N_B \sin \alpha, \\ M\ddot{\eta} = -Mg + T \sin \alpha + N_B \cos \alpha + N_A, \end{cases}$$

și din teorema de mișcare în jurul centrului de masă

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \omega) &= \overrightarrow{CA} \times \mathbf{N}_A + \overrightarrow{CB} \times (\mathbf{T} + \mathbf{N}_B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow I_3 \ddot{\varphi} &= Ta \sin(\alpha - \varphi) - aN_A \cos \varphi + aN_B \cos(\varphi - \alpha) \quad \left(I_3 = \frac{1}{2} Ma^2 \right). \end{aligned}$$

Eliminând din aceste ecuații forțele de legătură

$$\begin{cases} N_A \sin \alpha = M(\ddot{\xi} \cos \alpha + \ddot{\eta} \sin \alpha) + Mg \sin \alpha - T, \\ N_B \sin \alpha = -M\ddot{\xi} + T \cos \alpha, \end{cases}$$

se obține ecuația diferențială pentru unghiul φ

$$2\ddot{\varphi} \left\{ Q \cos^2 \varphi + Mg \left[\cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right] \right\} + \\ + \dot{\varphi}^2 [Mg \cos \alpha \sin(\alpha - 2\varphi) - Q \sin 2\varphi] = \frac{g}{2a} \sin \alpha \cos \varphi (2Q - Mg \sin \alpha).$$

Această ecuație se mai poate scrie

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\left\{ Q \cos^2 \varphi + Mg \left[\cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right] \right\} \dot{\varphi}^2 \right) = \\ = \frac{g}{2a} \sin \alpha \cos \varphi (2Q - Mg \sin \alpha)$$

Pentru condiții inițiale nule $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$, se obține integrala primă

$$\left\{ Q \cos^2 \varphi + Mg \left[\cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right] \right\} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2a} \sin \alpha \cos \varphi (2Q - Mg \sin \alpha).$$

Această relație coincide cu integrala primă care rezultă din teorema energiei

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \right) = \mathbf{Mg} \cdot \mathbf{V}_C + \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_B + \underbrace{\mathbf{N}_A \cdot \mathbf{V}_A}_{=0(\perp)} + \underbrace{\mathbf{N}_B \cdot \mathbf{V}_B}_{=0(\perp)},$$

$$\mathbf{V}_C^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = a^2 \dot{\varphi}^2 \left[(2 \cos \varphi \operatorname{ctg} \alpha + \sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi \right] = \\ = \frac{a^2 \dot{\varphi}^2}{\sin^2 \alpha} \left[4 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \sin^2 \alpha \right],$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = I_3 \dot{\varphi}^2,$$

$$\mathbf{Mg} \cdot \mathbf{V}_C = \frac{d}{dt} (\mathbf{Mg} \cdot \mathbf{X}_C) = \frac{d}{dt} (-Mg\eta) = \frac{d}{dt} (-Mga \sin \varphi),$$

$$\mathbf{V}_B = \dot{s} (\cos \alpha \mathbf{t}_1 + \sin \alpha \mathbf{t}_2), \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{V}_B = \left(Q - \frac{Q}{g} \ddot{s} \right) \dot{s} = \frac{d}{dt} \left(Qs - \frac{Q}{2g} \dot{s}^2 \right),$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{Ma^2 \dot{\varphi}^2}{\sin^2 \alpha} \left[4 \cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \sin^2 \alpha \right] + \frac{1}{2} Ma^2 \dot{\varphi}^2 \right\} = \\ = 2 \frac{d}{dt} \left[-Mga \sin \varphi + 2Qa \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} - \frac{2Q}{g} \dot{\varphi}^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \alpha} \right];$$

ultima relație devine pentru condiții inițiale nule

$$\left\{ Q \cos^2 \varphi + Mg \left[\cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right] \right\} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{2a} \sin \alpha \cos \varphi (2Q - Mg \sin \alpha).$$

Această integrală primă permite și evaluarea vitezei cu care cade greutatea Q

$$\dot{s}^2 = \left(\frac{2a}{\sin \alpha} \dot{\varphi} \cos \varphi \right)^2 = \\ = 2ag \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{\sin \alpha} \frac{2Q - Mg \sin \alpha}{Q \cos^2 \varphi + Mg \left[\cos \alpha \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right]}.$$

În figura 4.6.3b s-a reprezentat variația unghiului j pentru $Q = 2Mg$ și $\alpha = \pi/4$. În funcție de poziție (unghiul j), în figurile 4.6.3c și 4.6.3d s-a reprezentat variația reacțiunilor normale N_A, N_B respectiv variația tensiunii în fir.

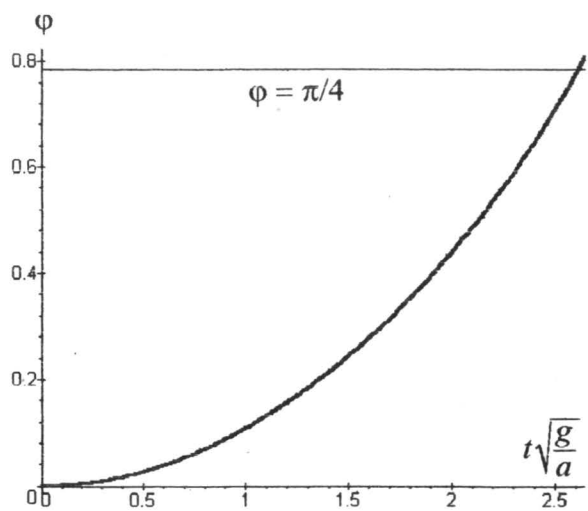


Figura 4.6.3b

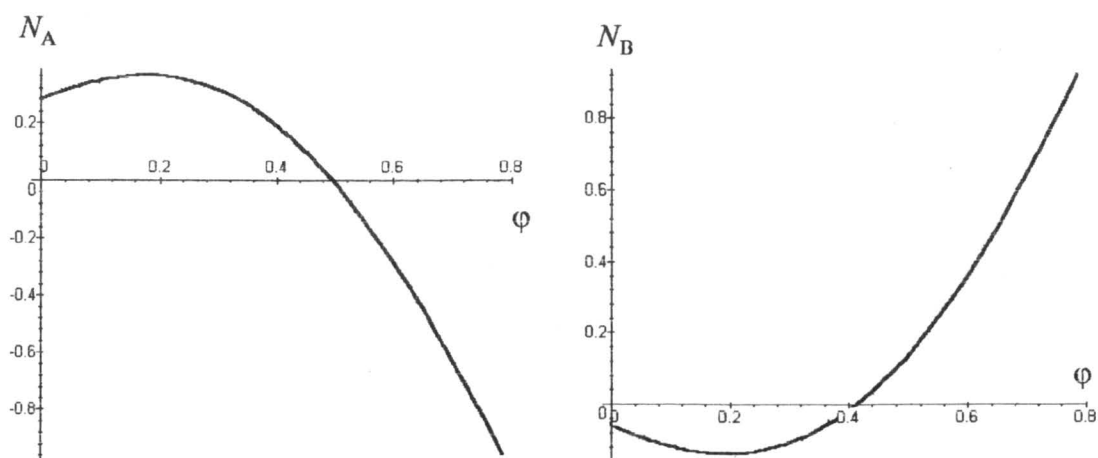


Figura 4.6.3c

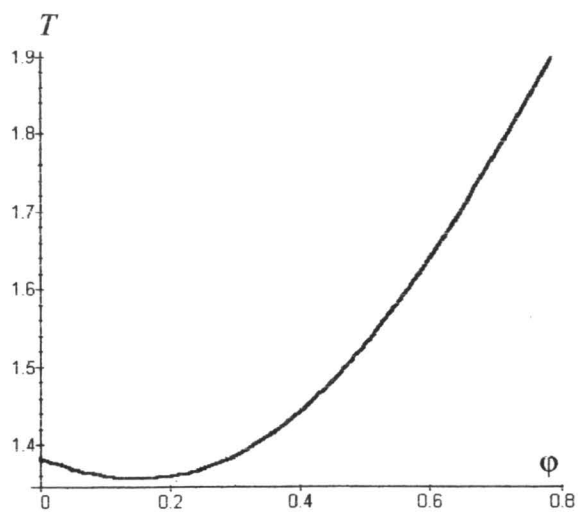


Figura 4.6.3d

4.6.4. Să se studieze rostogolirea cu frecare a unui disc circular de rază a , omogen greu de masă M , pe un plan înclinat, considerând că discul rămâne tot timpul în planul vertical al poziției inițiale.

Pentru rezolvare v. problema 4.7.6.

4.6.5. O sferă omogenă grea, de rază a și de masă M se rostogolește cu frecare pe o sferă fixă de rază b ($b > a$). Centrul sferei mobile se găsește inițial pe suportul diametrului vertical al sferei fixe. Să se studieze mișcarea; să se determine unghiul la care sfera mobilă părăsește sfera fixă. Coeficientul de frecare de alunecare/aderență este f . Frecarea de rostogolire și pivotare se neglijează. (Routh)

Pentru rezolvare v. problema 4.7.7.

§4.7. Dinamica solidului rigid cu legături de contact, fara si cu frecare de aderenta/alunecare si/sau de rostogolire-pivotare

Fie doua solide rigide limitate de suprafetele (S_1) respectiv (S_2), având în comun la orice moment un punct A (punctul M_1 al primului solid rigid si punctul M_2 al celui de al doilea solid rigid coincid cu punctul geometric de contact A), în punctul de contact cel puțin una dintre suprafete admitând plan tangent de normala $\mathbf{n}$. Marimile aferente primului corp vor fi indexate cu "1" iar cele aferente celui de al doilea corp cu indicele "2".

Fie $\{\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{M}_A^{(1)}\}$ respectiv $\{\mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{M}_A^{(2)}\}$ torsorul rezultat al fortelor de legatura în punctul A. Conform principiului actiunii si reactiunii

$$\{\mathbf{R}^{(1)}, \mathbf{M}_A^{(1)}\} + \{\mathbf{R}^{(2)}, \mathbf{M}_A^{(2)}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{0}\}.$$

Rezultanta fortelor de legatura în A se descompune într-o componenta normala la planul tangent si o componenta în planul tangent

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(i)} &= \mathbf{N}^{(i)} + \Phi^{(i)}, \\ \mathbf{N}^{(i)} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \quad \Phi^{(i)} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{aligned} \quad i = 1, 2,$$

$\mathbf{N}^{(i)}$ – reactiunea normala, $\Phi^{(i)}$ – forta de frecare de aderenta/alunecare.

Momentul rezultat al fortelor de legatura în A se descompune într-o componenta normala la planul tangent si o componenta în planul tangent

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A^{(i)} &= \mathbf{M}_r^{(i)} + \mathbf{M}_p^{(i)} \\ \mathbf{M}_r^{(i)} \times \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_p^{(i)} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{aligned} \quad i = 1, 2,$$

$\mathbf{M}_r^{(i)}$ – cuplul frecarii de rostogolire, $\mathbf{M}_p^{(i)}$ – cuplul frecarii de pivotare.

În miscarea primului corp în raport cu cel de al doilea, viteza relativa a punctului de contact A se afla în planul tangent

$$\mathbf{V}_A^{rel} = \mathbf{V}_{M_1} - \mathbf{V}_{M_2}, \quad \mathbf{V}_A^{rel} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

iar viteza unghiulara relativa este data de

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} - \boldsymbol{\omega}^{(2)},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_p, \quad \boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega}_p \cdot \mathbf{n} = \zeta,$$

$\boldsymbol{\omega}_r$ – viteza unghiulara de rostogolire, $\boldsymbol{\omega}_p$ – viteza unghiulara de pivotare.

Legile frecarii uscate dintre cele doua corpuri, deduse experimental, sunt:

i) daca corpurile se afla în echilibru

$$\|\Phi^{(i)}\| \leq f \|\mathbf{N}^{(i)}\|, \quad \|\mathbf{M}_r^{(i)}\| \leq \delta \|\mathbf{N}^{(i)}\|, \quad \|\mathbf{M}_p^{(i)}\| \leq \delta' \|\mathbf{N}^{(i)}\|,$$

f – coeficient de frecare de aderenta, δ – coeficient de frecare de rostogolire, δ' – coeficient de frecare de pivotare ($[f] = L^0 M^0 T^0$, $[\delta] = L^1 M^0 T^0$, $[\delta'] = L^1 M^0 T^0$);

ii) daca au loc alunecare, rostogolire si pivotare

$$\Phi^{(1)} = -f \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|}, \quad \mathbf{M}_r^{(1)} = -\delta \frac{\boldsymbol{\omega}_r}{\|\boldsymbol{\omega}_r\|}, \quad \mathbf{M}_p^{(1)} = -\delta' \frac{\boldsymbol{\omega}_p}{\|\boldsymbol{\omega}_p\|}$$

iii) daca una din componentele miscarii nu exista, pentru aceasta componenta a miscarii se utilizeaza inegalitatea corespunzatoare de la punctul i), iar pentru celelalte componente egalitatile corespunzatoare de la punctul ii).

4.7.1. Sa se studieze miscarea unei sfere omogene grele, de masa M , de raza a , pe un plan orizontal, frecarea fiind neglijabila.

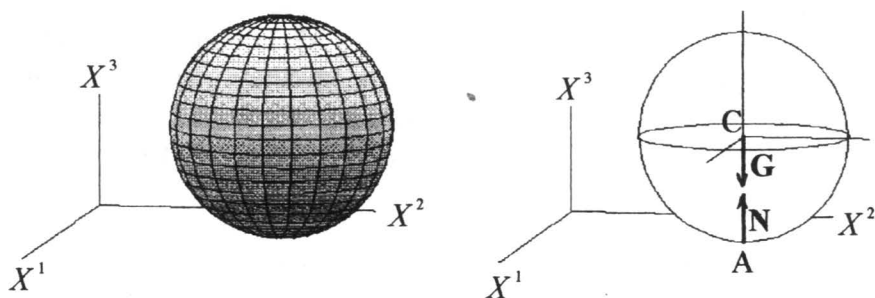


Figura 4.7.1a

Fie O un punct în planul orizontal considerat, OX^3 verticala ascendentă prin O , OX^1 și OX^2 două direcții ortogonale în planul orizontal. Fie C centrul de masă al sferei. Obligația sferei de a rămâne în contact cu planul orizontal se traduce prin

$$X_C^3 = a.$$

Din teorema de mișcare a centrului de masă C al sferei

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = M\mathbf{g} + \mathbf{N},$$

$\mathbf{N}$ – reacțiunea normală a planului, se obține prin proiecție pe axele reperului fix

$$M\ddot{X}_C^1 = 0, M\ddot{X}_C^2 = 0, 0 = -Mg + N,$$

Rezultă ca centrul de masă are o mișcare rectilinie și uniformă

$$\begin{cases} X_C^1 = X_C^{1o} + V^{1o}t, \\ X_C^2 = X_C^{2o} + V^{2o}t, \\ X_C^3 = a, \end{cases}$$

și ca mărimea reacțiunii normale este egală cu greutatea sferei

$$N = Mg$$

Teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă C

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0} \quad \left(\mathbf{I}_C = J\mathbf{1}, J = \frac{2}{5}Ma^2 \right)$$

arată că sfera are o mișcare de rotație uniformă

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o$$

în jurul centrului de masă.

Fie $\mathbf{u}$ direcția fixă a vitezei unghiulare, $\boldsymbol{\omega} = \omega^o \mathbf{u}$. Fie un al doilea reper fix $OY^1Y^2Y^3$, cu axa OY^3 având direcția $\mathbf{u}$. Pentru unghiurile lui Euler în raport cu acest reper, constanta vitezei unghiulare conduce la relațiile

$$\begin{cases} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = 0, \\ -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi = 0, \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \omega^o, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0, \\ \phi = 0, \\ \psi = \psi^o t; \end{cases}$$

prin urmare sfera se rotește uniform în jurul axei Cx^3 având mereu direcția fixă $\mathbf{u}$, trecând prin punctul C cu mișcare rectilinie uniformă.

În figura 4.7.1b s-au reprezentat poziții ale centrului de masă $C_1 \dots C_5$, ale punctelor corespunzătoare de contact $A_1 \dots A_5$ și direcția $\mathbf{u}$ ($C_1 B_1 \dots C_5 B_5$) pentru intervale de timp egale

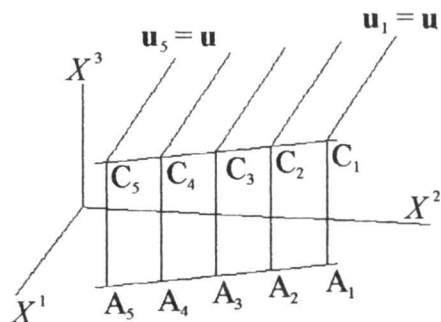


Figura 4.7.1b

4.7.2. Să se studieze mișcarea (de rostogolire-pivotaire și alunecare) a unei sfere omogene grele, de masă M , de rază a , pe un plan orizontal, coeficientul de frecare de alunecare fiind f (frecarea de rostogolire și pivotare se neglijează).

Se alege un referențial inertial $OX^1 X^2 X^3$ ca la problema precedentă. Obligația sferei de a rămâne în contact cu planul orizontal se traduce prin

$$X_C^3 = a.$$

În afara forței de greutate $M\mathbf{g}$ și a reacțiunii normale $\mathbf{N}$, în acest caz intervine și forța de legătură tangențială – forța de frecare de alunecare – Φ

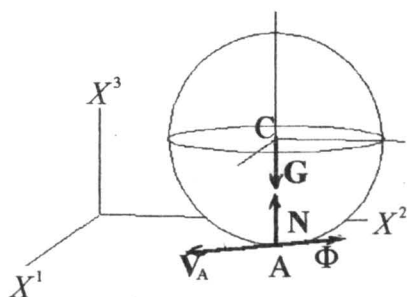


Figura 4.7.2a

$$\Phi = -fN \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|},$$

A fiind punctul de contact al sferei cu planul orizontal.

Din teorema de mișcare a centrului de masă C

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = M\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}$$

rezultă ca și în cazul precedent mărimea reacțiunii normale $\mathbf{N}$

$$N = Mg.$$

Pentru mișcarea centrului de masă al sferei se obțin ecuațiile

$$M\ddot{X}_C^1 = \Phi^1, M\ddot{X}_C^2 = \Phi^2,$$

Φ^1 și Φ^2 fiind componentele (în plan orizontal) ale forței de frecare Φ .

Principiul de bilanț al momentului cinetic în raport cu centrul de masă C

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{CA} \times \Phi$$

conduce, prin proiecție după direcțiile reperului fix, la

$$J\dot{\Omega}^1 = -a\Phi^2, J\dot{\Omega}^2 = a\Phi^1, J\dot{\Omega}^3 = 0.$$

Având în vedere că viteza punctului de contact A este

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA},$$

se obtine, atâta timp cât persista alunecarea, adica

$$\Phi = -\alpha^2(t) \mathbf{V}_A \quad \left(\alpha^2(t) = \frac{fMg}{\|\mathbf{V}_A\|} \right),$$

ecuatia diferentiala pentru $\mathbf{V}_A$

$$\dot{\mathbf{V}}_A = -\frac{7\alpha^2(t)}{2M} \mathbf{V}_A;$$

din aceasta ecuatie rezulta prin integrare formala

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A^o \exp \left[-\frac{7}{2M} \int_0^t \alpha^2(t') dt' \right],$$

ceea ce arata ca

- viteza punctului de contact are o directie fixa (directia lui $\mathbf{V}_A^o$);
- marimea vitezei punctului de contact scade în timp;
- forta de frecare este constanta (directie fixa - directia lui $\mathbf{V}_A$, sens opus lui $\mathbf{V}_A$, marime constanta fMg).

Revenind la ecuatie de miscare a centrului de masa, rezulta ca acesta descrie în plan paralel cu OX^1X^2 parabola

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{X}_C^o + \mathbf{V}_C^o t + \frac{1}{2M} \Phi t^2;$$

din teorema momentului cinetic în raport cu punctul C, rezulta ca viteza unghiulara variaza linear în timp

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o - \frac{1}{J} (a \mathbf{I}_3 \times \Phi) t;$$

In plus si viteza punctului de contact A variaza linear în timp

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_A^o \left[1 - \frac{7}{2} fg \frac{t}{\|\mathbf{V}_A^o\|} \right]$$

si aceasta având directie fixa, componentele sale se anuleaza simultan la momentul

$$t_f = \frac{2}{7} \cdot \frac{\|\mathbf{V}_A^o\|}{fg},$$

moment de la care înceteaza alunecarea.

Unghiurile lui Euler se determina prin integrarea sistemului

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \Omega^1 \cos \psi + \Omega^2 \sin \psi, \\ \dot{\phi} \sin \theta = \Omega^1 \sin \psi - \Omega^2 \cos \psi, \\ \dot{\psi} \sin \theta = \Omega^3 \sin \theta - (\Omega^1 \cos \psi + \Omega^2 \sin \psi) \cos \theta. \end{cases}$$

Pentru ca miscarea de rostogolire pivotare sa fie insotita de alunecare, este necesar ca la momentul initial viteza punctului A sa fie nenula. Fie $\mathbf{V}_C^o = V_C^o \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\omega}^o = \omega^o \mathbf{u}$ ($\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{I}_3 = 0$), atunci $\mathbf{V}_A^o = V_C^o \boldsymbol{\tau} - \omega^o a \mathbf{u} \times \mathbf{I}_3$, evident cu $(V_C^o)^2 + (\omega^o a)^2 \neq 0$. Viteza initiala a punctului de contact ar putea fi nula daca $\lambda \boldsymbol{\tau} = \mathbf{u} \times \mathbf{I}_3$ si $V_C^o = \lambda a \omega^o$. Conditia de nonparalelism se mai poate scrie

$$\boldsymbol{\tau} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{I}_3) \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u} \neq 0.$$

Pot fi analizate cazurile particulare

$$i) \quad \mathbf{V}_C^o = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega}^o = \omega^o \mathbf{u} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{I}_3; \quad \mathbf{u} = u^1 \mathbf{I}_1 + u^2 \mathbf{I}_2 + u^3 \mathbf{I}_3;$$

– traiectoria este rectilinie

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{X}_C^o + \frac{1}{2} \frac{fg}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} (-u^1 \mathbf{I}_2 + u^2 \mathbf{I}_1) t^2 ;$$

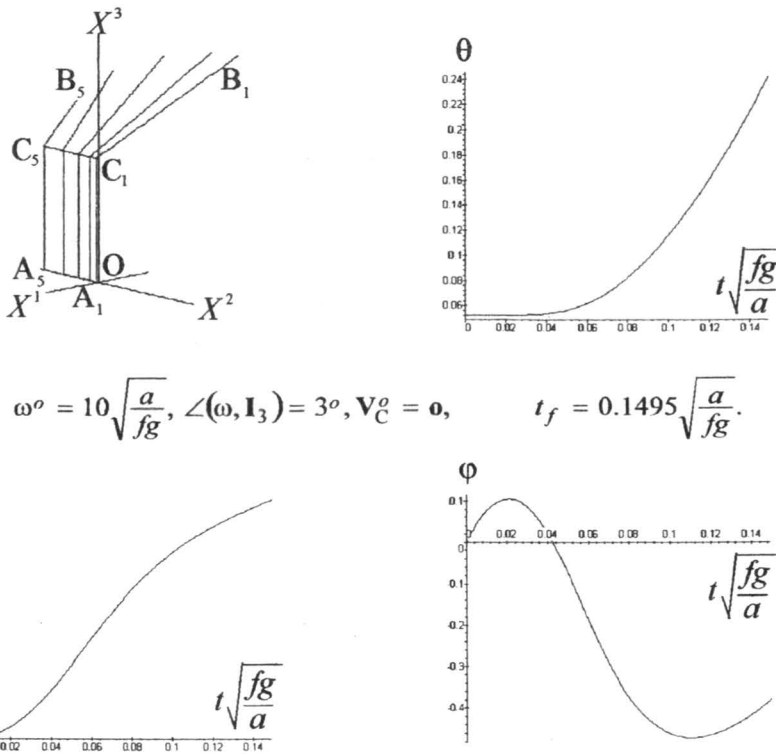
– miscarea de rotatie se compune dintr-o pivotare uniforma si o rostogolire uniform accelerata dupa directia $u^1 \mathbf{I}_1 + u^2 \mathbf{I}_2$:

$$\omega = \omega^o \mathbf{u} - \frac{5fg}{2a} (u^1 \mathbf{I}_1 + u^2 \mathbf{I}_2) \frac{t}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} ;$$

– forta de frecare $\Phi = \frac{fMg}{\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}} (-u^1 \mathbf{I}_2 + u^2 \mathbf{I}_1) ;$

– durata miscarii $t_f = \frac{a\omega^o}{fg} \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} .$

In figura 4.7.2b este prezentate ca si la problema precedenta cateva poziti echidistante in timp ale vectorilor $\overrightarrow{CA}$ si versorului $\mathbf{t}_3$ precum si variatia in timp a unghiurilor lui Euler pentru datele initiale mentionate in figura.



$$\omega^o = 10 \sqrt{\frac{a}{fg}}, \angle(\omega, \mathbf{I}_3) = 3^\circ, \mathbf{V}_C^o = \mathbf{o}, \quad t_f = 0.1495 \sqrt{\frac{a}{fg}} .$$

Figura 4.7.2b

ii) $\mathbf{V}_C^o = V_C^o \tau, \tau = \tau^1 \mathbf{I}_1 + \tau^2 \mathbf{I}_2, \omega^o = \mathbf{o};$

– traiectoria este rectilinie

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{X}_C^o + \left(V_C^o t - \frac{1}{2} fg t^2 \right) \tau ;$$

– miscarea de rotatie este o rostogolire accelerata dupa directie perpendiculara pe τ :

$$\omega = \frac{5fg}{2a} (\tau^2 \mathbf{I}_1 - \tau^1 \mathbf{I}_2) t ;$$

– forta de frecare $\Phi = -fMg \tau ;$

– durata miscarii $t_f = \frac{2V_C^o}{fg} .$

Rezultate similare cu cele din cazul i) au fost prezentate in figura 4.7.2c.

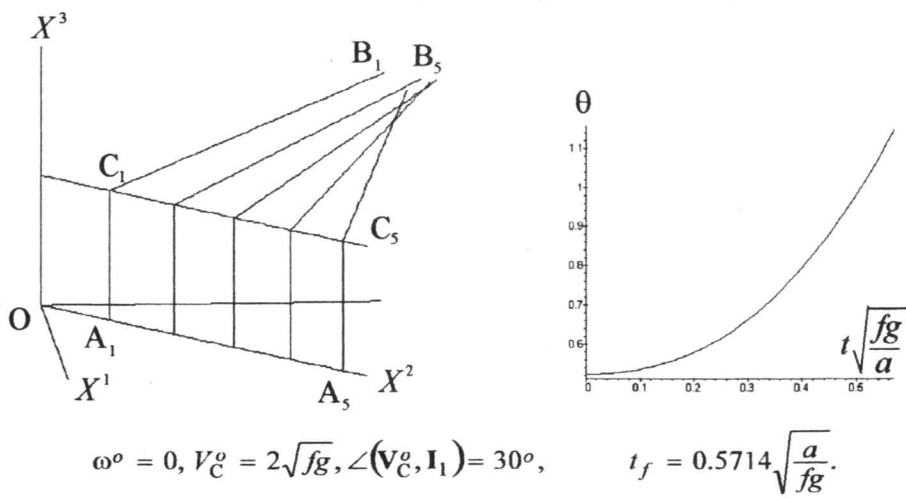


Figura 4.7.2c

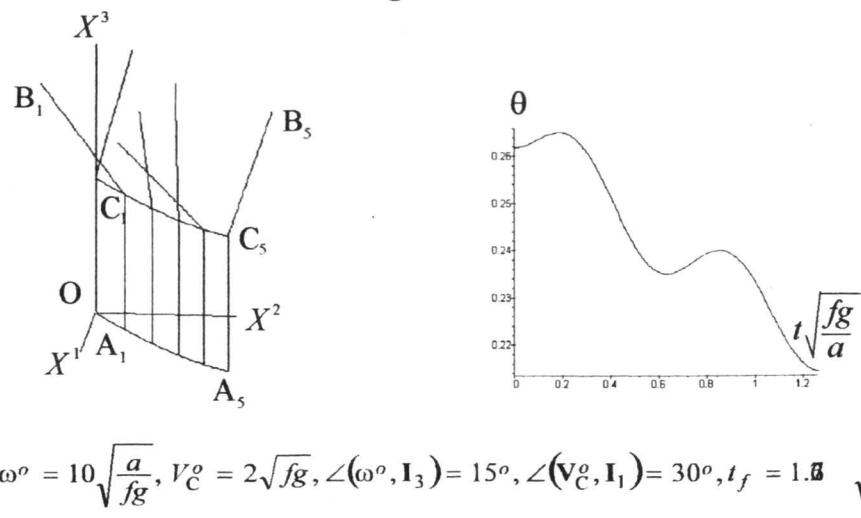


Figura 4.7.2d

iii) $\mathbf{V}_C^o = V_C^o \boldsymbol{\tau} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}^o = \boldsymbol{\omega}^o \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{I}_3 = 0$), $V_A^o = V_C^o \boldsymbol{\tau} + a \boldsymbol{\omega}^o \mathbf{I}_3 \times \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;

– traiectoria este un arc de parabola

$$\mathbf{X}_C = \mathbf{X}_C^o + V_C^o \boldsymbol{\tau} t - \frac{1}{2} fg \frac{V_C^o \boldsymbol{\tau} + a \boldsymbol{\omega}^o \mathbf{I}_3 \times \mathbf{u}}{\sqrt{(V_C^o)^2 + (a \boldsymbol{\omega}^o)^2 ((u^1)^2 + (u^2)^2) + 2 V_C^o a \boldsymbol{\omega}^o (\tau^2 u^1 - \tau^1 u^2)}} t^2;$$

– miscarea de rotatie

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o \mathbf{u} - \frac{1}{J} (a \mathbf{I}_3 \times \Phi);$$

– forta de frecare $\Phi = -fMg \frac{V_C^o \boldsymbol{\tau} + a \boldsymbol{\omega}^o \mathbf{I}_3 \times \mathbf{u}}{\sqrt{(V_C^o)^2 + (a \boldsymbol{\omega}^o)^2 ((u^1)^2 + (u^2)^2) + 2 V_C^o a \boldsymbol{\omega}^o (\tau^2 u^1 - \tau^1 u^2)}};$

– durata miscarii $t_f = \frac{2}{f} \frac{\sqrt{(V_C^o)^2 + (a \boldsymbol{\omega}^o)^2 ((u^1)^2 + (u^2)^2) + 2 V_C^o a \boldsymbol{\omega}^o (\tau^2 u^1 - \tau^1 u^2)}}{fg}$.

Rezultate similare cu cele din cazul i) au fost prezentate in figura 4.7.2d.

Pentru integrarea numerica s-au utilizat variabilele adimensionale

$$t' = t \sqrt{\frac{fg}{a}}, V' = \frac{V}{\sqrt{fga}}, \Omega' = \Omega \sqrt{\frac{a}{fg}}.$$

Pentru obtinerea rezultatelor din figura 4.7.2d s-a utilizat un program de tipul

```
> with(DEtools): with(plots):
> tt1:=30*Pi/180: v1:=cos(tt1): v2:=sin(tt1): nv:=2:
> tt0:=15*Pi/180: u1:=0: u2:=-sin(tt0): u3:=cos(tt0): n:=10:
> VA0:=sqrt(nv^2+n^2*(u1^2+u2^2)+2*nv*n*(v2*u1-v1*u2)):
> om1:=n*u1+5/2*(nv*v2-n*u1)*t/VA0: om2:=n*u2+5/2*(-nv*v1-n*u2)*t/VA0: om3:=n*u3:
> p:=dsolve({diff(x(t),t)=om2*z(t)-om3*y(t),diff(y(t),t)=om3*x(t)-om1*z(t),diff(z(t),t)=om1*y(t)-om2*x(t),x(0)
> =0,y(0)=sin(tt0),z(0)=cos(tt0)},{x(t),y(t),z(t)},type=numeric,output=listprocedure);
> fx:=subs(p,x(t)): fy:=subs(p,y(t)): fz:=subs(p,z(t)):
> cx:=proc(t) nv*v1*t*(nv*v1-n*u2)*t^2/2/VA0 end: cy:=proc(t) nv*v2*t*(nv*v2-n*u1)*t^2/2/VA0 end:
> tf:=evalf(2/7*VA0): t1:=tf/5: t2:=2*tf/5: t3:=3*tf/5: t4:=4*tf/5: t5:=5*tf/5:
> axa1:=spacecurve([s,0,0],s=0..1,color=black): axa2:=spacecurve([0,s,0],s=0..1,color=black): axa3:=spa
> cecurve([0,0,s],s=0..2,color=black):
> CA0:=spacecurve([cx(0),cy(0),s],s=0..1,color=black):
> CA1:=spacecurve([cx(t1),cy(t1),s],s=0..1,color=black):
> CA2:=spacecurve([cx(t2),cy(t2),s],s=0..1,color=black):
> CA3:=spacecurve([cx(t3),cy(t3),s],s=0..1,color=black):
> CA4:=spacecurve([cx(t4),cy(t4),s],s=0..1,color=black):
> CA5:=spacecurve([cx(t5),cy(t5),s],s=0..1,color=black):
> CB0:=spacecurve([cx(0)+s*fx(0),cy(0)+s*fy(0),1+s*fz(0)],s=0..1,color=black):
> CB1:=spacecurve([cx(t1)+s*fx(t1),cy(t1)+s*fy(t1),1+s*fz(t1)],s=0..1,color=black):
> CB2:=spacecurve([cx(t2)+s*fx(t2),cy(t2)+s*fy(t2),1+s*fz(t2)],s=0..1,color=black):
> CB3:=spacecurve([cx(t3)+s*fx(t3),cy(t3)+s*fy(t3),1+s*fz(t3)],s=0..1,color=black):
> CB4:=spacecurve([cx(t4)+s*fx(t4),cy(t4)+s*fy(t4),1+s*fz(t4)],s=0..1,color=black):
> CB5:=spacecurve([cx(t5)+s*fx(t5),cy(t5)+s*fy(t5),1+s*fz(t5)],s=0..1,color=black):
> trajectC:=spacecurve([cx(t),cy(t),1],t=0..t5,color=black):
> trajectA:=spacecurve([cx(t),cy(t),0],t=0..t5,color=black):
> display({CA0,CA1,CA2,CA3,CA4,CA5,CB0,CB1,CB2,CB3,CB4,CB5,trajectC,trajectA,axa1,axa2,axa3},
> scaling=unconstrained,orientation=[75,65]);
> plot([cx(t),cy(t),t=-10..10],color=black);
> q:=dsolve({diff(theta(t),t)=om1*cos(psi(t))+om2*sin(psi(t)),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=om1*sin(psi(t))-om2
> *cos(psi(t)),sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=om3*sin(theta(t))-(om1*sin(psi(t))-om2*cos(psi(t)))*cos(theta(t)),th
> eta(0)=tt0,phi(0)=0,psi(0)=0},{theta(t),psi(t),phi(t)},type=numeric);
> odeplot(q,[t,theta(t)],0..t5,numpoints=100); # default=49
> odeplot(q,[t,psi(t)],0..t5,numpoints=100);
> odeplot(q,[t,phi(t)],0..t5,numpoints=100);
```

4.7.3. Sa se studieze miscarea unei sfere omogene grele, de masa M , de raza a , pe un plan orizontal, cu frecare de alunecare astfel încât sfera se rostogoleste si pivoteaza fara sa alunece. Se neglijeaza frecarea de rostogolire si pivotare.

Se alege un referential inertial $OX^1 X^2 X^3$ ca la problemele precedente. Conditia ca rostogolirea si pivotarea sa nu fie însoțite de alunecare este ca viteza punctului de contact A sa fie nula

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{0}$$

sau

$$\mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}.$$

In aceasta relatie vectoriala sunt cuprinse legaturile neolome (v. observatia 1)

$$V_C^1 - a\Omega^2 = 0, V_C^2 + a\Omega^1 = 0$$

si legatura oloma

$$X_C^3 = a.$$

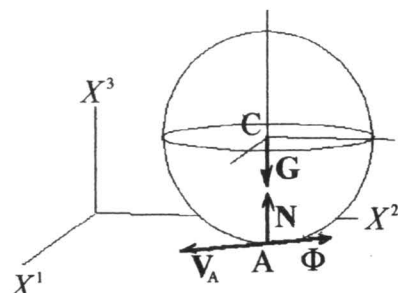


Figura 4.7.3

Asupra sferei actioneaza forta de greutate $M\mathbf{g}$, forta de legatura normala $\mathbf{N}$ si forta de legatura tangentiala Φ , despre care se stie numai ca

$$\|\Phi\| \leq f\|\mathbf{N}\|,$$

f fiind coeficientul de frecare de aderenta.

Teorema de miscare a centrului de masa

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = M\mathbf{g} + \mathbf{N} + \Phi$$

si teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masa C al sferei

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{CA} \times \Phi$$

conduc la sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} M\dot{V}_C^1 = \Phi^1, \\ M\dot{V}_C^2 = \Phi^2, \\ 0 = N - Mg, \end{cases} \quad \begin{cases} J\dot{\Omega}^1 = a\Phi^2, \\ J\dot{\Omega}^2 = -a\Phi^1, \\ J\dot{\Omega}^3 = 0, \end{cases}$$

din care prin gruparea ecuatiilor, eliminarea componentelor fortei de frecare si tinând seama de relatiile componentele vitezei punctului C si vitezei unghiulare (legaturile neolome), se obtine

$$\left(M + \frac{J}{a^2}\right)\dot{V}_C^1 = 0, \left(M + \frac{J}{a^2}\right)\dot{V}_C^2 = 0,$$

deci centrul de masa are o miscare rectilinie si uniforma

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_C^o.$$

Mai rezulta ca forta de legatura tangentiala este nula

$$\Phi = \mathbf{0}.$$

Apoi rezulta ca viteza unghiulara este un vector constant

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^o,$$

deci rotatia este uniforma. Din conditia de legatura se poate preciza acest vector

$$\omega = \Omega^3 \circ \mathbf{I}_3 + \frac{1}{a} \mathbf{I}_3 \times \mathbf{V}_C^o,$$

prima componenta corespunzând unei pivotari uniforme, iar cea de a doua unei rostogoliri uniforme.

Fie $\mathbf{u}$ direcția fixă a vitezei unghiulare, $\omega = \omega^o \mathbf{u}$. Fie un al doilea reper fix $OY^1Y^2Y^3$, cu axa OY^3 având direcția $\mathbf{u}$. Pentru unghiurile lui Euler în raport cu acest reper, constanta vitezei unghiulare conduce la relațiile

$$\begin{cases} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi = 0, \\ -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi = 0, \\ \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \omega^o, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0, \\ \varphi = 0, \\ \psi = \omega^o t; \end{cases}$$

prin urmare sfera se rotește uniform în jurul axei Cx^3 având mereu direcția fixă $\mathbf{u}$, trecând prin punctul C cu mișcare rectilinie uniformă.

Observația 1. În primele două probleme relațiile de legătură sunt olonome; în ultima problema pe lângă aceasta legătură apar două legături neolonome (neintegrabile)

$$\begin{cases} \dot{X}_C^1 - a(\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi) = 0, \\ \dot{X}_C^2 + a(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) = 0. \end{cases}$$

În cazul mișcării cu alunecare sfera are cinci grade de libertate, în cazul mișcării de rostogolire-pivotare fără alunecare sfera are trei grade de libertate.

Observația 2. Ecuațiile vectoriale de mișcare (corespunzând teoremei de mișcare a centrului de masă și teoremei momentului cinetic în raport cu centrul de masă) au fost în toate cazurile proiectate pe direcțiile reperului fix.

4.7.4. Să se studieze mișcarea fără alunecare pe un plan orizontal a unui disc circular omogen greu, de masă M , de rază a .

Se alege un referențial inertial $OX^1X^2X^3$ ca și în problemele precedente. Se va utiliza un reper mobil, cu originea în centrul de masă C al discului, dar care nu este solidar cu discul, constituit din direcțiile: Cz^3 normală la planul discului, Cz^1 după direcția liniei nodurilor (direcție orizontală, de intersecție a planului discului cu planul orizontal prin C), Cz^2 perpendiculară pe celelalte direcții. Reperul solidar cu discul, cu originea tot în C, are Cx^3 normală la planul discului, Cx^1 și Cx^2 în planul discului, direcții principale de inerție. Rotatia reperului $Cz^1z^2z^3$ față de un reper cu originea în C și cu axe paralele cu cele ale referențialului inertial este dată de

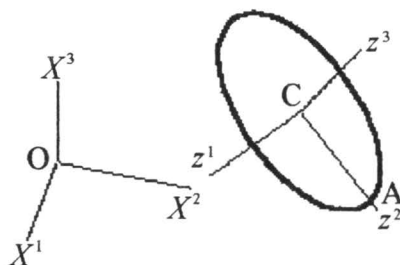


Figura 4.7.4a

$$\omega' = p' \mathbf{k}_1 + q' \mathbf{k}_2 + r' \mathbf{k}_3,$$

$$p' = \dot{\theta}, \quad q' = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r' = \dot{\psi} \cos \theta;$$

rotatia reperului solidar cu discul față de un reper cu originea în C și cu axe paralele cu cele ale referențialului inertial este dată de

$$\omega = \omega^1 \mathbf{i}_1 + \omega^2 \mathbf{i}_2 + \omega^3 \mathbf{i}_3,$$

$$\omega^1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \omega^2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad \omega^3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},$$

$$\omega = \omega' + \dot{\varphi} \mathbf{i}_3 = p \mathbf{k}_1 + q \mathbf{k}_2 + r \mathbf{k}_3,$$

$$p = \dot{\theta}, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

Asupra discului actioneaza forta de greutate Mg , forta de legatura normala $\mathbf{N}$ si forta de legatura tangentiala Φ cu

$$\|\Phi\| \leq f\|\mathbf{N}\|.$$

f fiind coeficientul de frecare de aderenta (frecarea de rostogolire-pivotare se neglijeaza).

Fie A punctul de contact al discului cu planul orizontal. Conditia ca miscarea sa fie fara alunecare este

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{0}$$

sau

$$\mathbf{V}_C + \omega \times \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}.$$

Se noteaza u, v, w componentele vitezei punctului C pe directiile $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. Relatiile de legatura în proiectie pe directiile $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, se scriu

$$u - ar = 0, \quad v = 0, \quad w + ap = 0.$$

Teorema de miscare a centrului de masa C

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = M\mathbf{g} + \mathbf{N} + \Phi$$

si teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masa

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \omega) = \overrightarrow{CA} \times (\mathbf{N} + \Phi)$$

se vor proiecta pe axele reperului $Cz^1 z^2 z^3$. Se obtine

$$\begin{cases} M[\dot{u} + q(w - v \operatorname{ctg} \theta)] = X, \\ M[\dot{v} + qu \operatorname{ctg} \theta - pw] = Y - Mg \sin \theta, \\ M[\dot{w} + pw - qu] = Z - Mg \cos \theta, \\ \begin{cases} I_1 \dot{p} + q(I_3 r - I_1 q \operatorname{ctg} \theta) = aZ, \\ I_1 \dot{q} - p(I_3 r - I_1 q \operatorname{ctg} \theta) = 0, \\ I_3 \dot{r} = -aX. \end{cases} \end{cases}$$

X, Y, Z componentele fortei de legatura $\mathbf{N} + \Phi$ pe directiile $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, iar X, Y, Z componentele fortei de legatura $\mathbf{N} + \Phi$ pe directiile $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$. $I_1 = I_2, I_3$ fiind momentele centrale principale de inertie.

Inlocuind u, v, w din relatiile de legatura în ecuatiile corespunzatoare teoremei de miscare a centrului de masa, rezulta

$$\begin{cases} Ma[\dot{r} - pq] = X, \\ Ma[qr \operatorname{ctg} \theta + p^2] = Y - Mg \sin \theta, \\ -Ma[\dot{p} + qr] = Z - Mg \cos \theta. \end{cases}$$

Eliminând X si Z între ecuatiile în care intervin în cele doua teoreme rezulta sistemul pentru componentele lui ω

$$\begin{cases} (I_1 + Ma^2)\dot{p} + (I_3 + Ma^2)qr - I_1 q^2 \operatorname{ctg} \theta = Mga \cos \theta, \\ I_1 \dot{q} - p(I_3 r - I_1 q \operatorname{ctg} \theta) = 0, \\ (I_3 + Ma^2)\dot{r} - Ma^2 pq = 0. \end{cases}$$

Tinand seama de faptul ca $p = \dot{\theta}$, se obtine din ultima ecuatie

$$q = \frac{I_3 + Ma^2}{Ma^2} \frac{dr}{d\theta}$$

si introducand in a doua ecuatie rezulta ecuatia diferentiala pentru r

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dr}{d\theta} - \frac{I_3 Ma^2}{I_1(I_3 + Ma^2)} r = 0.$$

Daca aceasta ecuatie este integrata, q rezulta din

$$q = \frac{I_3 + Ma^2}{Ma^2} \cdot \frac{dr}{d\theta}.$$

Presupunand integrata aceasta ecuatie, variatia lui θ în timp se obtine considerând integrala energiei cinetice

$$M(u^2 + v^2 + w^2) + I_1(p^2 + q^2) + I_3 r^2 = 2Mga \sin \theta + 2h$$

utilizând relatiile de legatura, variatia în raport cu θ a lui q si r si faptul ca $p = \dot{\theta}$

$$(I_1 + Ma^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + I_1 q^2(\theta) + (I_3 + Ma^2) r^2(\theta) = 2Mga \sin \theta + 2h$$

ecuatie echivalenta cu ecuatia pentru p stabilita mai sus.

Din ecuatiile neutilizate se determina componentele fortei de legatura X, Y, Z ; componentele vitezei centrului de masa u, v, w rezulta din relatiile de legatura. Daca s-au determinat p, q, r , unghiurile lui Euler rezulta din relatiile de legatura cu acestea

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta^o + \int_0^t p(\tau) d\tau, \quad \psi(t) = \psi^o + \int_0^t \frac{q(\tau)}{\sin \theta(\tau)} d\tau, \\ \varphi(t) &= \varphi^o + \int_0^t \left[r(\tau) - q(\tau) \frac{\cos \theta(\tau)}{\sin \theta(\tau)} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Coordonatele centrului de masa în raport cu reperul inertial rezulta din

$$\begin{cases} V_C^1 = u \cos \psi - \sin \psi [v \cos \theta - w \sin \theta], \\ V_C^2 = u \sin \psi + \cos \psi [v \cos \theta - w \sin \theta], \\ V_C^3 = v \sin \theta + w \cos \theta. \end{cases}$$

În mare parte dificultatea problemei revine deci în integrarea ecuatiei de ordinul al doilea în r . Prin schimbarea de variabila

$$s = \cos^2 \theta,$$

aceasta se reduce la ecuatia hipergeometrica Euler-Gauss

$$\begin{aligned} s(1-s) \frac{d^2 r}{ds^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)] \frac{dr}{ds} - \alpha \beta r &= 0, \\ \alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha \beta &= \frac{I_3 Ma^2}{4I_1(I_3 + Ma^2)}, \gamma = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Cazuri particulare
– discul este placa

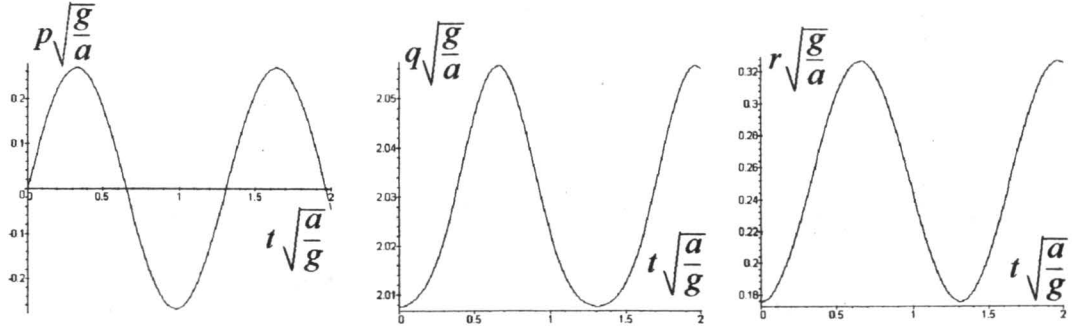
$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{4} Ma^2, I_3 = \frac{1}{2} Ma^2 &\Rightarrow \alpha \beta = \frac{1}{3} \\ \alpha, \beta &= \frac{3 \pm i\sqrt{39}}{12}; \end{aligned}$$

– discul este circumferinta materiala

$$I_1 = \frac{1}{2}Ma^2, I_3 = Ma^2 \Rightarrow \alpha\beta = \frac{1}{4}$$

$$\alpha, \beta = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}$$

In general insa in tabele sau in calculator sunt date functii hipergeometrice de argumente reale, asadar in aceasta problema integrarea numerica este preferabil sa se realizeze cu sistemul complet de ecuatii. Acest lucru s-a realizat pentru un set de date initiale (aceleasi pentru ambele cazuri de discuri) si este prezentat in figurile 4.7.4b respectiv 4.7.4c.



$$\theta^o = 85^\circ, \psi^o = \varphi^o = 0, p^o = 0, q^o = 2 \cos \theta^o / \sin^2 \theta^o, r^o = 2 / \sin \theta^o.$$

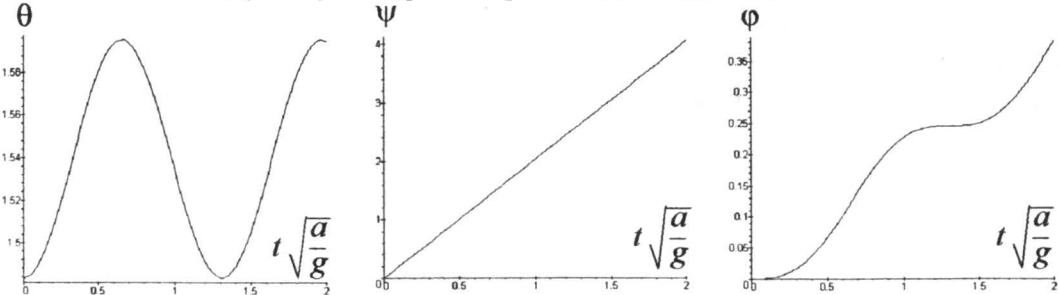
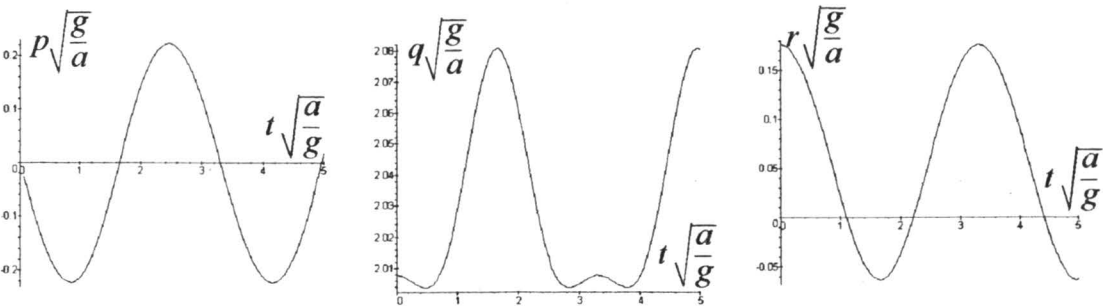


Figura 4.7.4b



$$\theta^o = 85^\circ, \psi^o = \varphi^o = 0, p^o = 0, q^o = 2 / \sin \theta^o, r^o = 2 \cos \theta^o / \sin^2 \theta^o,$$

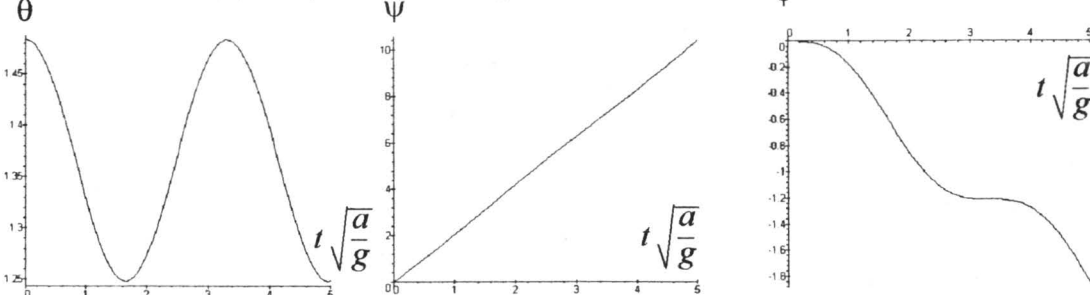


Figura 4.7.4c

Programul utilizat, cu variabilele adimensionale $t\sqrt{\frac{g}{a}}, p\sqrt{\frac{a}{g}}, q\sqrt{\frac{a}{g}}, r\sqrt{\frac{a}{g}}$, a fost

```
> with(DEtools): with(plots): n:=2: tt0:=85*Pi/180:
> desol1:=dsolve({diff(r(t),t)=2/3*p(t)*q(t),diff(q(t),t)=2*p(t)*r(t)-p(t)*q(t)*cot(theta(t)),diff(p(t),t)=5*q(t)^2*cot(theta(t))-6/5*q(t)*r(t)-4/5*cos(theta(t)),diff(theta(t),t)=p(t),sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=q(t),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=r(t)*sin(theta(t))-q(t)*cos(theta(t)),r(0)=n*cot(tt0)/sin(tt0),q(0)=n/sin(tt0), p(0)=0,theta(0)=tt0,psi(0)=0,phi(0)=0},{r(t),q(t),p(t),theta(t),psi(t),phi(t)},numeric);
> odeplot(desol1,[t,p(t)],0..2,numpoints=100);
> odeplot(desol1,[t,q(t)],0..2,numpoints=100);
> odeplot(desol1,[t,r(t)],0..2,numpoints=100);
> odeplot(desol1,[t,theta(t)],0..2,numpoints=100);
> odeplot(desol1,[t,psi(t)],0..2,numpoints=100);
> odeplot(desol1,[t,phi(t)],0..2,numpoints=100);
> desol2:=dsolve({diff(r(t),t)=p(t)*q(t)/2,diff(q(t),t)=2*p(t)*r(t)-p(t)*q(t)*cot(theta(t)),diff(p(t),t)=q(t)^2*cot(theta(t))/3-4/3*q(t)*r(t)-2/3*cos(theta(t)),diff(theta(t),t)=p(t),sin(theta(t))*diff(psi(t),t)=q(t),sin(theta(t))*diff(phi(t),t)=r(t)*sin(theta(t))-q(t)*cos(theta(t)),r(0)=n*cot(tt0)/sin(tt0),q(0)=n/sin(tt0), p(0)=0,theta(0)=tt0,psi(0)=0,phi(0)=0},{r(t),q(t),p(t),theta(t),psi(t),phi(t)},numeric);
> odeplot(desol2,[t,p(t)],0..5,numpoints=100);
> odeplot(desol2,[t,q(t)],0..5,numpoints=100);
> odeplot(desol2,[t,r(t)],0..5,numpoints=100);
> odeplot(desol2,[t,theta(t)],0..5,numpoints=100);
> odeplot(desol2,[t,psi(t)],0..5,numpoints=100);
> odeplot(desol2,[t,phi(t)],0..5,numpoints=100);
```

Observatie. Ca si în problema precedenta, legaturile impuse solidului sunt una olonoma

$$X_C^3 = a \sin \theta$$

si doua neolonomie

$$\begin{cases} \dot{X}_C^1 - a(\dot{\phi} \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \sin \theta + \dot{\psi} \cos \psi \cos \theta) = 0, \\ \dot{X}_C^2 - a(\dot{\phi} \sin \theta - \dot{\theta} \cos \psi \sin \theta + \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta) = 0. \end{cases}$$

Si în acest caz solidul are 3 grade de libertate.

4.7.5. Se considera un plan înclinat cu unghiul α fata de planul orizontal, realizat din doua sine paralele (între ele si cu linia de panta maxima a planului înclinat) la distanta $2d$. Pe acest plan se misca o bila sferica omogena grea, de masa M , de raza a , $a > d$. Sa se studieze miscarea, coeficientul de frecare de alunecare fiind f . Frecarea de rostogolire-pivotare se neglijeaza. Discutie.

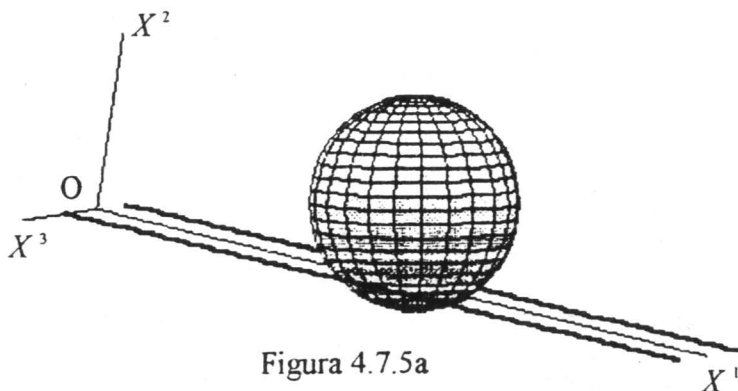


Figura 4.7.5a

Fie $OX^1 X^2 X^3$ un referential inertial având axa OX^1 dupa directia de panta maxima, OX^2 dupa normala la plan si OX^3 completând triedrul drept. In raport cu acest reper, centrul C al bilei are coordonatele

$$X_C^1 = \xi, X_C^2 = \sqrt{a^2 - d^2}, X_C^3 = 0.$$

Fortele care determina miscarea bilei sunt: forta data – forta de greutate $M\mathbf{g}$, fortele de legatura în punctele de contact A si B, având componentele normale $\mathbf{N}_A$ si $\mathbf{N}_B$ si componentele tangentiala Φ_A si Φ_B .

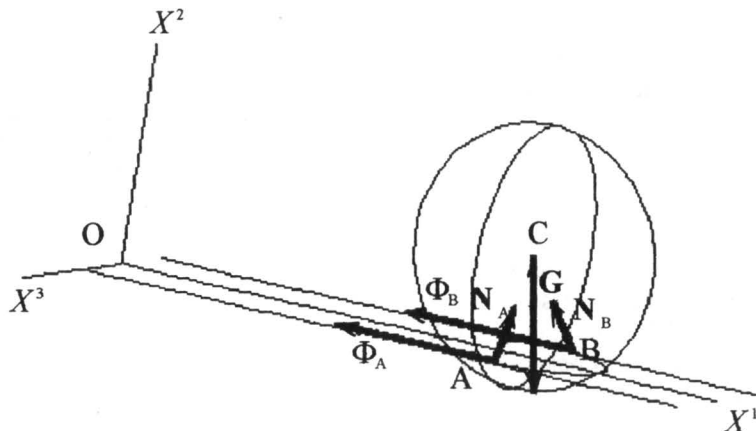


Figura 4.7.5b

Cazul I. Daca înclinarea planului nu este prea mare si bila este lasata liber (viteza initiala a centrului de masa nula, viteza unghiulara initiala nula), bila ramâne în repaus pe planul înclinat. Sistemul de forte (data si de legatura) în echilibru satisface relatiile

$$M\mathbf{g} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + \Phi_A + \Phi_B,$$

$$\|\Phi_A\| \leq f\|\mathbf{N}_A\|, \|\Phi_B\| \leq f\|\mathbf{N}_B\|,$$

$$N_A = N_B, \Phi_A = \Phi_B \text{ (din simetrie).}$$

Rezulta

$$N_A = N_B = Mg \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

$$\Phi_A = \Phi_B = Mg \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha \leq f \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

2β fiind masura unghiului ACB. Echilibrul are loc atâta timp cât unghiul de înclinare al planului ramâne inferior valorii α_0 .

$$\alpha_0 = \arctg \left(\frac{f}{\cos \beta} \right).$$

Cazul II. Pentru un unghi de înclinare a superior valorii α_0 începe, chiar pentru bila lasata liber în orice pozitie, o miscare fara alunecare. Conditia ca miscarea sa fie fara alunecare revine la anulara vitezelor punctelor de contact A si B

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B = \mathbf{0}.$$

Cum

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA}, \mathbf{V}_B = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CB},$$

se obtine

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{I}_3,$$

$$\xi + a \omega \cos \beta = 0.$$

Miscarea va fi descrisa de ecuatiile reprezentând principiile de bilant ale impulsului

$$M\ddot{\mathbf{X}}_C = M\mathbf{g} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + \boldsymbol{\Phi}_A + \boldsymbol{\Phi}_B$$

si momentului cinetic în raport cu centrul de masa C

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{\Phi}_A + \overrightarrow{CB} \times \boldsymbol{\Phi}_B,$$

în proiectie pe axele reperului fix

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} = Mg \sin \alpha - \Phi_A - \Phi_B, \\ 0 = (N_A + N_B) \cos \beta - Mg \cos \alpha, \\ 0 = (N_A - N_B) \sin \beta, \\ \begin{cases} 0 = -a(\Phi_A - \Phi_B) \sin \beta, \\ J\dot{\omega} = -a(\Phi_A - \Phi_B) \cos \beta, \\ 0 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \left(\mathbf{I}_C = J\mathbf{I}, J = \frac{2}{5}Ma^2 \right).$$

Miscarea centrului de masa este deci (rectilinie) uniform variata, caracterizata prin

$$\ddot{\xi} = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \frac{J}{a^2 \cos^2 \beta}};$$

bila are o rotatie uniform variata în jurul centrului de masa, caracterizata prin

$$\omega = -\frac{\dot{\xi}}{a \cos \beta}.$$

Fortele de legatura au valorile

$$N_A = N_B = \frac{1}{2}Mg \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

$$\Phi_A = \Phi_B = \frac{1}{2}Mg \frac{J \sin \alpha}{J + Ma^2 \cos^2 \beta}.$$

Evident valorile fortelor de legatura tangentiale trebuie sa fie inferioare valorii limita $fN_A = fN_B$, deci rostogolirea fara alunecare are loc daca

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = \arctg \left(\frac{1 + \frac{5}{2} \cos^2 \beta}{\cos \beta} \right).$$

Cazul III. Pentru o înclinare mai mare a planului, $\alpha > \alpha_1$, bila va avea o miscare de rotatie cu alunecare. Miscarea va fi descrisa de ecuatiile reprezentând principiile de bilant ale impulsului si momentului cinetic în raport cu centrul de masa C, cu legea corespunzatoare de frecare

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{X}}_C &= M\mathbf{g} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + \boldsymbol{\Phi}_A + \boldsymbol{\Phi}_B, \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \overrightarrow{CA} \times \boldsymbol{\Phi}_A + \overrightarrow{CB} \times \boldsymbol{\Phi}_B, \end{aligned}$$

$$\Phi_A = -f|N_A| \frac{\mathbf{V}_A}{\|\mathbf{V}_A\|}, \Phi_B = -f|N_B| \frac{\mathbf{V}_B}{\|\mathbf{V}_B\|}.$$

Dar fortele de legatura tangentiala nu pot fi orientate decât în lungul sinelor (actio-reactio), deci

$$\Phi_A = -f|N_A|\mathbf{I}_1, \Phi_B = -f|N_B|\mathbf{I}_1$$

si viteza unghiulara, întrucât directiile vitezelor punctelor de contact coincid cu directia sinelor, nu are componenta dupa aceasta directie. In proiectie pe directiile reperului fix, ecuatiile de miscare vor fi

$$\begin{cases} M\ddot{\xi} = Mg \sin \alpha - f(N_A + N_B), \\ 0 = (N_A + N_B)\cos \beta - Mg \cos \alpha, \\ 0 = (N_A - N_B)\sin \beta, \\ \begin{cases} 0 = -af(N_A - N_B)\sin \beta, \\ J\dot{\Omega}^2 = -af(N_A - N_B)\cos \beta, \\ J\dot{\Omega}^3 = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Rezulta fortele de legatura cu modulele

$$N_A = N_B = \frac{1}{2}Mg \frac{\cos \alpha}{\cos \beta},$$

$$\Phi_A = \Phi_B = \frac{1}{2}fMg \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Miscarea de translatie a centrului de masa este uniform variata, caracterizata prin

$$\ddot{\xi} = g \left[\sin \alpha - f \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right];$$

rotatia în jurul centrului de masa este o rostogolire uniform variata, caracterizata prin

$$\dot{\Omega}^2 = 0, \dot{\Omega}^3 = -fMga \cos \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Problema constituie subiect al unei lucrari de laborator prezentata în [13].

4.7.6. Sa se studieze miscarea fara frecare a unei sfârleze pe un plan orizontal.

Sfârleaza este un corp rigid omogen greu, cu simetrie axiala (în raport cu axa CA), capatul A al axei de simetrie aflându-se tot timpul în plan orizontal.

Se considera reperul inertial $OX^1X^2X^3$ ales astfel încât axa OX^3 este verticala ascendenta, planul OX^1X^2 fiind planul orizontal considerat. Reperul solidar cu sfârleaza prin centrul de masa C, $Cx^1x^2x^3$ este astfel încât axa Cx^3 este axa de simetrie a corpului. Pozitia sfârlezei la fiecare moment este data prin coordonatele centrului de masa $C(X_C^1, X_C^2, X_C^3)$ si prin unghiurile Euler ψ, θ, φ care precizeaza pozitia triedrului mobil $Cx^1x^2x^3$, solidar cu rigidul în raport cu directiile reperului inertial $OX^1X^2X^3$. Legatura de contact impusa rigidului revine la definirea cotei centrului de masa prin relatia

$$X_C^3 = l \cos \theta, l = CA.$$

Asupra sfârlezei actioneaza forta de greutate Mg si forta de legatura N , normala la planul OX^1X^2 . M este masa corpului, iar I_C – tensorul de inertie în raport cu centrul de masa

$$\mathbf{I}_C = I_1(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2) + I_3\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3.$$

Miscarea sfârlezei rezulta din teorema de miscare a centrului de masa

$$\frac{d}{dt}(M\mathbf{V}_C) = M\mathbf{g} + \mathbf{N} \text{ sau } \begin{cases} M\ddot{X}_C^1 = 0, \\ M\ddot{X}_C^2 = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2}(Ml \cos \theta) = -Mg + N \end{cases}$$

si din teorema de miscare în jurul centrului de masa

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \overrightarrow{CA} \times \mathbf{N} \text{ sau } \begin{cases} I_1 \dot{\omega}^1 + (I_3 - I_1) \omega^2 \omega^3 = +Nl \sin \theta \cos \varphi, \\ I_1 \dot{\omega}^2 - (I_3 - I_1) \omega^1 \omega^3 = -Nl \sin \theta \sin \varphi, \\ I_3 \dot{\omega}^3 = 0. \end{cases}$$

Sistemul de ecuatii de miscare admite urmatoarele integrale prime

– conservarea proiectiei în plan OX^1X^2 a impulsului total

$$\begin{cases} M\dot{X}_C^1 = M\dot{X}_C^{1o}, \\ M\dot{X}_C^2 = M\dot{X}_C^{2o}, \end{cases}$$

rezulta miscarea rectilinie uniforma a proiectiei centrului de masa pe planul orizontal OX^1X^2 .

$$\begin{cases} X_C^1 = X_C^{1o} + \dot{X}_C^{1o} t, \\ X_C^2 = X_C^{2o} + \dot{X}_C^{2o} t, \end{cases}$$

– conservarea componentei momentului cinetic total dupa directia $\mathbf{e}_3$ datorita simetriei axiale

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = -l \mathbf{e}_3 \times N \mathbf{I}_3 \Big| \cdot \mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{e}_3 \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = 0 \Rightarrow$$

$$\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} = \omega_3^o, \quad \omega_3^o = \dot{\psi}_o \cos \theta_o + \dot{\phi}_o;$$

– conservarea componentei momentului cinetic total dupa directia fixa $\mathbf{I}_3$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = -l \mathbf{e}_3 \times N \mathbf{I}_3 \Big| \cdot \mathbf{I}_3 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_3 \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_3^o \cos \theta = \alpha, \quad \alpha = I_1 \dot{\psi}_o \sin^2 \theta_o + I_3 \omega_3^o \cos \theta_o;$$

– conservarea energiei totale

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \right) = M\mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_C + \underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbf{V}_A}_{=0(\perp)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} - M\mathbf{g} \cdot \mathbf{X}_C \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ml^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + I_1 \left(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \right) = -2Mgl \cos \theta + \beta,$$

$$\beta = Ml^2 \dot{\theta}_o^2 \sin^2 \theta_o + I_1 \left(\dot{\psi}_o^2 \sin^2 \theta_o + \dot{\theta}_o^2 \right) + 2Mgl \cos \theta_o,$$

(la ultimele doua integrale prime s-a tinut seama de primele doua integrale prime).

Se procedeaza ca la solidul rigid cu punct fix, cazul Lagrange-Poisson; se obtine

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha - I_3 \omega_3^o \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta},$$

$$\left(I_1 + Ml^2 \sin^2 \theta \right) \dot{\theta}^2 + \frac{(\alpha - I_3 \omega_3^o \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta} = \beta - 2Mgl \cos \theta,$$

$$u = \cos \theta,$$

$$\dot{u}^2 = \frac{I_1(\beta - 2Mglu)(1 - u^2) - (\alpha - I_3\omega_3^0 u)^2}{I_1[I_1 + Ml^2(1 - u^2)]}$$

Integrarea ecuatiei diferentiale de mai sus pentru variabila auxiliara u se realizeaza în intervalul $[u_1, u_2] \subseteq [-1, +1]$, asa cum rezulta din tabelul urmator

u	$-\infty$	$-u_4$	-1	u_1	u_2	1	u_4	u_3	$+\infty$
$I_1(\beta - 2Mglu)(1 - u^2) - (\alpha - I_3\omega_3^0u)^2$	-	-	-	-	0	+	0	-	+
$I_1 + Ml^2(1 - u^2)$	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$\frac{I_1(\beta - 2Mglu)(1 - u^2) - (\alpha - I_3\omega_3^0u)^2}{I_1[I_1 + Ml^2(1 - u^2)]}$	+	+		-	-	0	+	0	-

$$\begin{matrix} [& \rightarrow &] \\ [& \leftarrow &] \end{matrix}$$

Variatia variabilei auxiliare u este periodica cu perioada

$$\tau = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{I_1[I_1 + Ml^2(1 - u^2)]}{I_1(\beta - 2Mglu)(1 - u^2) - (\alpha - I_3\omega_3^0 u)^2} du.$$

Unghiul de nutatie variaza între valorile $\theta_2 = \arccos u_2$ respectiv $\theta_1 = \arccos u_1$.

Odata determinat u respectiv unghiurile de nutatie θ , unghiurile de precesie ψ si rotatie proprie ϕ rezulta prin cuadraturi.

Reactiunea normala variaza periodic tot cu perioada τ .

4.7.7. O sfera omogena grea, de raza a si de masa M se rostogoleste cu frecare pe o sfera fixa de raza b ($b > a$). Centrul sferei mobile se gaseste initial aproape pe suportul diametrului vertical al sferei fixe. Sa se studieze miscarea; sa se determine unghiul la care sfera mobila paraseste sfera fixa. Coeficientul de frecare de alunecare/aderenta este f . Frecarea de rostogolire si pivotare se neglijeaza. (Routh)

Problema poate fi studiata ca o problema plana. In planul meridian în care se desfasoara miscarea, se alege reperul inertial OX^1X^2 cu originea în centrul sferei fixe s cu axa OX^2 verticala ascendenta. Reperul solidar cu sfera mobila Cx^1x^2 are originea în centrul sferei mobile. Fie ϕ unghiul pe care îl face OC cu verticala ascendenta

$$\phi = \angle(OC, OX^2)$$

si ϑ unghiul dintre axa Cx^1 cu OX^1

$$\vartheta = \angle(Cx^1, OX^1).$$

Asupra sferei mobile actioneaza greutatea proprie Mg si forta de legatura în punctul de contact A cu componenta normala (dupa directia razei comune în punctul de contact) N si componenta tangentiala Φ .

Miscarea sferei mobile rezulta din teorema de miscare a centrului de masa

$$\frac{d}{dt}(MV_C) = Mg + N + \Phi \Leftrightarrow \begin{cases} M(a+b)\ddot{\phi} = Mg \sin \phi - \Phi, \\ M(a+b)\ddot{\phi}^2 = Mg \cos \phi - N \end{cases}$$

(proiecție pe direcția normalei respectiv tangentei) și din teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \overrightarrow{CA} \times \Phi \Leftrightarrow J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = a\Phi \quad \left(J = \frac{2}{5} Ma^2 \right).$$

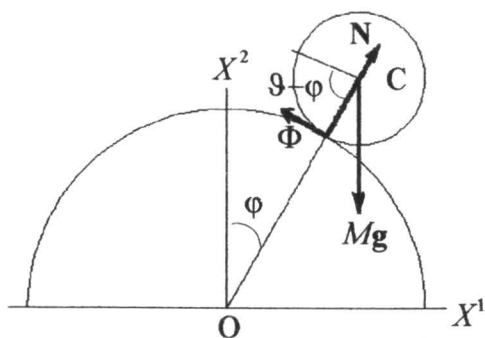


Figura 4.7.7a

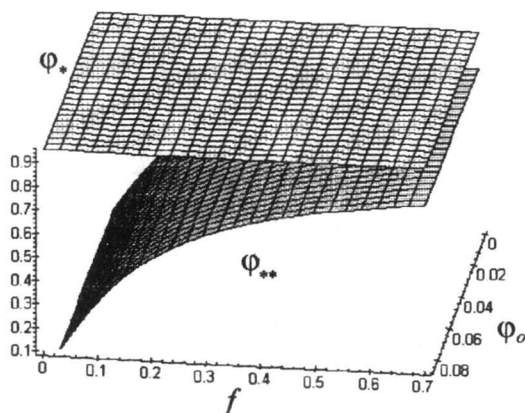


Figura 4.7.7b

În cazul rostogolirii fără alunecare are loc relația

$$a(\vartheta - \varphi) = b\varphi \Leftrightarrow a\vartheta = (a+b)\varphi.$$

Eliminând Φ între prima și a treia ecuație de mișcare rezultă ecuația diferențială pentru unghiul φ

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{5}{7} \frac{g}{a+b} \sin \varphi.$$

ținând cont de condițiile inițiale ($t = 0 : \varphi = \varphi_o, \dot{\varphi} = 0$) se obține integrala primă

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{a+b} (\cos \varphi_o - \cos \varphi).$$

Rezultă componentele forței de legătură

$$\begin{cases} N = \frac{1}{7} Mg(17 \cos \varphi - 10 \cos \varphi_o), \\ \Phi = \frac{2}{7} Mg \sin \varphi. \end{cases}$$

Legătura încetează când componenta normală a forței de legătură se anulează, adică până la unghiul

$$\varphi_* = \arccos\left(\frac{10}{17} \cos \varphi_o\right).$$

Miscarea de rostogolire fără alunecare are loc atâta timp cât $\Phi \leq fN$ adică pentru

$$2 \sin \varphi \leq f(17 \cos \varphi - 10 \cos \varphi_o).$$

Unghiul limită φ_{**} este soluție a ecuației

$$\begin{aligned} 2 \sin \varphi_{**} &= f(17 \cos \varphi_{**} - 10 \cos \varphi_o) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (17 + 10 \cos \varphi_o) f \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_{**}}{2} + 4 \operatorname{tg} \frac{\varphi_{**}}{2} - (17 - 10 \cos \varphi_o) f &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\varphi_{**}}{2} &= \frac{-2 + \sqrt{4 + (289 - 100 \cos^2 \varphi_o) f^2}}{(17 + 10 \cos \varphi_o) f}. \end{aligned}$$

Acest unghi este mai mic decât cel obținut anterior

$$\cos \varphi_{**} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_{**}}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_{**}}{2}} = \frac{10f \cos \varphi_0 + 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_{**}}{2}}{17f - 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_{**}}{2}},$$

$$\cos \varphi_{**} > \cos \varphi_* \Rightarrow \varphi_{**} < \varphi_*.$$

Prin urmare după atingerea unghiului φ_{**} începe rostogolirea cu alunecare. Aceasta este guvernată de ecuațiile de mișcare

$$\begin{cases} M(a+b)\ddot{\varphi} = Mg \sin \varphi - \Phi, \\ M(a+b)\dot{\varphi}^2 = Mg \cos \varphi - N, \end{cases}$$

unde înșă

$$\Phi = -fN \frac{V_A}{\|V_A\|} = -fN \tau, \quad N = M(a+b)\dot{\varphi}^2 - Mg \cos \varphi.$$

Se obține următorul sistem de ecuații diferențiale pentru unghiurile φ și ϑ

$$\begin{cases} (a+b)\ddot{\varphi} = g \sin \varphi - f[(a+b)\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi], \\ a\ddot{\vartheta} = \frac{5}{2}f[(a+b)\dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi]. \end{cases}$$

Prima ecuație diferențială se poate scrie

$$\frac{d\dot{\varphi}^2}{d\varphi} + 2f\dot{\varphi}^2 = 2\frac{g}{a+b} [\sin \varphi + f \cos \varphi]$$

Cu datele inițiale $t = t_{**}$: $\varphi = \varphi_{**}$, $\dot{\varphi}^2 = \frac{10}{7} \frac{g}{a+b} (1 - \cos \varphi_{**})$, ea admite soluția

$$\dot{\varphi}^2 = C \exp(-2f\varphi) + C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi$$

$$C_1 = 2\frac{g}{a+b} \frac{3f}{1+4f^2}, \quad C_2 = -2\frac{g}{a+b} \frac{1-2f^2}{1+4f^2}$$

$$C = \left\{ \frac{10}{7} \frac{g}{a+b} (1 - \cos \varphi_{**}) - C_1 \sin \varphi_{**} - C_2 \cos \varphi_{**} \right\} \exp(2f\varphi_{**}).$$

Sfera mobilă paraseste sfera fixă atunci când componenta normală a forței de legătură se anulează; valoarea obținută în acest caz depinde de coeficientul de frecare și este soluția unei ecuații transcendente, câteva valori au fost calculate cu programul următor

```
> fi1:=proc(u) arccos(10/17*cos(u)) end:
> fi2:=proc(u,f) 2*arctan((-2+sqrt(4+(289-100*cos(u)^2)*f^2))/(17+10*cos(u)))/f end:
> C1:=proc(f) 6*f/(1+4*f^2) end: C2:=proc(f) -2*(1-2*f^2)/(1+4*f^2) end:
> C:=proc(u,f) 10/7*(1-cos(fi2(u,f)))-C1(f)*sin(fi2(u,f))-C2(f)*cos(fi2(u,f)) end:
> ec:=proc(x,u,f) C(u,f)*exp(-2*f*(x-fi2(u,f)))+C1(u)*sin(x)+(C2(u)-1)*cos(x) end:

> u1:=Pi/180: # 1°
> for j from 1 to 7 do [j*0.1, evalf(fi1(Pi/180)),evalf(fi2(Pi/180,j*0.1)),fsolve(ec(x,Pi/180,j*0.1),x,0..Pi)] od:
[.1, .9420321823, .3137120016, 1.027161799]
[.2, .9420321823, .5074377812, 1.271490262]
[.3, .9420321823, .6176385242, 1.437756556]
[.4, .9420321823, .6852243402, 1.529380127]
[.5, .9420321823, .7301403354, 1.573753722]
[.6, .9420321823, .7619331906, 1.592267164]
[.7, .9420321823, .7855429622, 1.597515604]
```

```
> u2:=2*Pi/180: # 2°
> for j from 1 to 7 do [j*0.1,evalf(f1(2*Pi/180)),evalf(f2(2*Pi/180,j*0.1)),fsolve(ec(x,2*Pi/180,j*0.1),x,0..Pi/
> 2)] od;
```

```
[.1, .9423644382, .3139002392, .9868249492]
[.2, .9423644382, .5077064916, 1.231893983]
[.3, .9423644382, .6179374946, 1.400585862]
[.4, .9423644382, .6855365932, 1.494414653]
[.5, .9423644382, .7304593666, 1.540340332]
[.6, .9423644382, .7622560938, 1.559838325]
[.7, .9423644382, .7858682698, 1.565668139]
```

```
> u3:=3*Pi/180: # 3°
> for j from 1 to 7 do [j*0.1,evalf(f1(3*Pi/180)),evalf(f2(3*Pi/180,j*0.1)),fsolve(ec(x,3*Pi/180,j*0.1),x,0..Pi/
> 2)] od;
```

```
[.1, .9429179071, .3142138714, .9458369987]
[.2, .9429179071, .5081541574, 1.192033821]
[.3, .9429179071, .6184355476, 1.363431531]
[.4, .9429179071, .6860567614, 1.459633786]
[.5, .9429179071, .7309908196, 1.507208946]
[.6, .9429179071, .7627939934, 1.527749641]
[.7, .9429179071, .7864101714, 1.534197740]
```

```
> u4:=4*Pi/180: # 4°
> for j from 1 to 7 do [j*0.1,evalf(f1(4*Pi/180)),evalf(f2(4*Pi/180,j*0.1)),fsolve(ec(x,4*Pi/180,j*0.1),x,0..Pi/
> 2)] od;
```

```
[.1, .9436921545, .3146527548, .9042644442]
[.2, .9436921545, .5087805010, 1.151982572]
[.3, .9436921545, .6191323380, 1.326373496]
[.4, .9436921545, .6867844652, 1.425121211]
[.5, .9436921545, .7317342972, 1.474445037]
[.6, .9436921545, .7635464810, 1.496087633]
[.7, .9436921545, .7871682528, 1.503191838]
```

```
> u5:=5*Pi/180: # 5°
> for j from 1 to 7 do [j*0.1,evalf(f1(5*Pi/180)),evalf(f2(5*Pi/180,j*0.1)),fsolve(ec(x,5*Pi/180,j*0.1),x,0..Pi/
> 2)] od;
```

```
[.1, .9446865738, .3152166886, .8621704551]
[.2, .9446865738, .5095851352, 1.111810445]
[.3, .9446865738, .6200273822, 1.289488986]
[.4, .9446865738, .6877191752, 1.390957441]
[.5, .9446865738, .7326892444, 1.442130449]
[.6, .9446865738, .7645129868, 1.464934818]
[.7, .9446865738, .7881419344, 1.472733562]
```

>

4.7.7. Conul dublu. Fie un plan înclinat realizat prin articularea a doua trapeze dreptunghice identice, în lungul bazei mici, astfel încât unghiul dintre planele poate varia (și odata cu acesta și unghiul planului înclinat cu planul orizontal). Pe acest plan înclinat se poate rostogoli un con dublu (doua conuri circulare, drepte, identice, având baza comună) omogen. Să se studieze rostogolirea fără alunecare a conului dublu pe planul înclinat (frecarea de rostogolire se neglijează).

Traectoria centrului de masă al conului dublu este rectilie

Planele tangente la conuri, prin muchiile ce determina planul înclinat, se intersectează după o dreaptă fixă în planul bisector al unghiului diedru format de planele trapezelor. Aceasta dreaptă este tangenta la cercul director, deci centrul de masă al conului dublu, coincidând cu centrul cercului director, se va mișca pe o dreaptă paralelă cu dreapta de mai înainte, la o distanță egală cu raza cercului director.

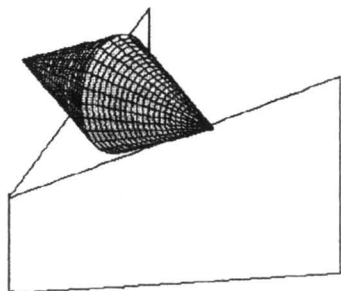


Figura 4.7.8a

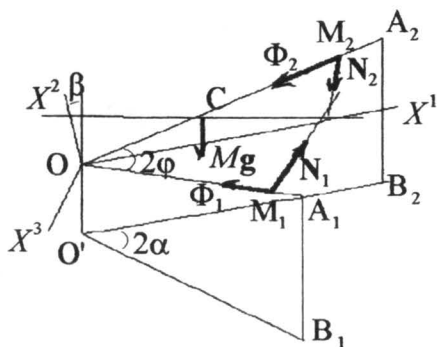


Figura 4.7.8b

Fie $OX^1X^2X^3$ reperul inertial triortogonal: axa OX^1 – bisectoarea unghiului OA_1A_2 , axa OX^2 în planul de simetrie, perpendiculară pe OX^1 , OX^3 perpendiculară pe planul de simetrie. Fie 2φ măsura unghiului OA_1A_2 , 2α măsura unghiului $O'B_1B_2$ (proiecția unghiului OA_1A_2 în planul orizontal), β măsura unghiului dintre OX^2 și verticala ascendentă.

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \beta}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \beta}}.$$

În raport cu reperul $OX^1X^2X^3$, ecuațiile dreptelor OA_1 , respectiv OA_2 , vor fi

$$\begin{cases} X^2 = 0 \\ X^3 = \pm X^1 \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

iar ecuațiile celor două conuri

$$f_{1,2}(X^1, X^2, X^3) \equiv (X^3 \mp h)^2 - \operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X^1 - X_C^1)^2 + (X^2 - X_C^2)^2 \right] = 0$$

unde h este înălțimea fiecărui con, 2θ – unghiul la vârf al fiecărui con, X_C^1, X_C^2 – coordonatele centrului de masă al conului dublu (centrul de masă se află în planul OX^1X^2).

Dreptele OA_1 , OA_2 sunt tangente la conuri, deci ecuația care da abscisele punctelor de contact M_1 și M_2

$$(\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{ctg}^2 \theta)(X^1)^2 + 2(X_C^1 \operatorname{ctg}^2 \theta - h \operatorname{tg} \varphi)X^1 + h^2 - \left[(X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] \operatorname{ctg}^2 \theta = 0$$

trebuie sa aiba discriminantul nul

$$\Delta' = \left(X_C^1 \operatorname{ctg}^2 \theta - h \operatorname{tg} \varphi \right)^2 - (\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{ctg}^2 \theta) \left\{ h^2 - \left[\left(X_C^1 \right)^2 + \left(X_C^2 \right)^2 \right] \right\} \operatorname{ctg}^2 \theta = \\ = \operatorname{ctg}^2 \theta \left[\left(X_C^1 \operatorname{tg} \varphi - h \right)^2 + (\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{ctg}^2 \theta) \left(X_C^2 \right)^2 \right] = 0.$$

problema este posibila daca si numai daca

$$\operatorname{tg}^2 \varphi < \operatorname{ctg}^2 \theta ;$$

traectoria centrului de masa, în plan $OX^1 X^2$ va fi

$$(i) \quad X_C^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} = h - X_C^1 \operatorname{tg} \varphi.$$

Punctele de contact M_1, M_2 între conul dublu si dreptele OA_1, OA_2 au coordonatele

$$\begin{cases} X_{M_1}^1 = X_{M_2}^1 = \frac{h \operatorname{tg} \varphi - X_C^1 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{ctg}^2 \theta} \\ X_{M_1}^3 = -X_{M_2}^3 = \frac{h \operatorname{tg} \varphi - X_C^1 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{ctg}^2 \theta} \operatorname{tg} \varphi \end{cases}$$

Relatiile de legatura

Înafara relatiilor de legatura geometrice (i), relatii suplimentare se obtin din presupunerea ca rostogolirea conului dublu se face fara alunecare, adica

$$\mathbf{V}_{M_1} = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CM_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_{M_2} = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CM_2} = \mathbf{0}.$$

Rezulta

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} \\ \begin{cases} X_C^1 + \omega X_C^2 = 0 \\ X_C^2 + \omega (X_{M_1}^1 - X_C^1) = 0 \end{cases} \end{cases} ;$$

ultimele doua relatii nu sunt independente, având în vedere relatia (i).

Fortele care actioneaza asupra conului dublu

Asupra conului dublu actioneaza

- forta de greutate (efectiva) Mg (M – masa conului dublu);
- fortele de legatura în punctele de contact M_1, M_2
- reactionile normale

$$\mathbf{N}_1 = N_1 \operatorname{vers}(\operatorname{grad} f_1), \quad \mathbf{N}_2 = N_2 \operatorname{vers}(\operatorname{grad} f_2),$$

– fortele de frecare

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = -\Phi_1 \operatorname{vers}(OA_1), \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = -\Phi_2 \operatorname{vers}(OA_2).$$

Teorema de miscare a centrului de masa

$$\frac{d}{dt}(M \mathbf{V}_C) = M \mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2.$$

În proiectie pe reperul $OX^1 X^2 X^3$ se obtine

$$M \ddot{X}_C^1 = -Mg \sin \beta -$$

$$-\frac{(X_{M_1}^1 - X_C^1) \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] + (X_{M_1}^3 - h)^2}} (N_1 + N_2) - (\Phi_1 + \Phi_2) \cos \varphi$$

(ii)

$$M\ddot{X}_C^2 = -Mg \cos \beta + \frac{\eta_C \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] + (X_{M_1}^3 - h)^2}} (N_1 + N_2)$$

$$0 = \frac{(X_{M_1}^3 - h)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] + (X_{M_1}^3 - h)^2}} (N_1 - N_2) - (\Phi_1 - \Phi_2) \sin \varphi.$$

Teorema de miscare în jurul centrului de masa

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) = \overrightarrow{\mathbf{CM}_1} \times (\mathbf{N}_1 + \boldsymbol{\Phi}_1) + \overrightarrow{\mathbf{CM}_2} \times (\mathbf{N}_2 + \boldsymbol{\Phi}_2)$$

Intrucât

$$\mathbf{I}_C = I(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_2) + J\mathbf{t}_3 \otimes \mathbf{t}_3,$$

$$I = \frac{1}{20} Mh^2 (3 \operatorname{tg}^2 \theta + 2), \quad J = \frac{3}{10} Mh^2 \operatorname{tg}^2 \theta,$$

în proiecție pe reperul $OX^1 X^2 X^3$ se obține

$$0 = X_C^2 \left[\frac{X_{M_1}^3 - h - X_{M_1}^3 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] + (X_{M_1}^3 - h)^2}} (N_1 - N_2) + (\Phi_1 - \Phi_2) \sin \varphi \right]$$

(iii)

$$0 = -\frac{X_{M_1}^3 - h - X_{M_1}^3 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] + (X_{M_1}^3 - h)^2}} (N_1 - N_2) +$$

$$+ \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1) \sin \varphi - X_{M_1}^3 \cos \varphi \right] (\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$J\dot{\omega} = -X_C^2 (\Phi_1 + \Phi_2) \cos \varphi$$

Studiul miscării

Din ecuațiile (iii)_{1,2} și (ii)₃ rezulta

$$N_1 = N_2 = N, \quad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$$

Celelalte ecuații dau

$$M\ddot{X}_C^1 = -Mg \sin \beta - 2 \frac{(X_{M_1}^1 - X_C^1) \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[(X_{M_1}^1 - X_C^1)^2 + (X_C^2)^2 \right] + (X_{M_1}^3 - h)^2}} N - 2\Phi \cos \varphi$$

$$M\ddot{X}_C^2 = -Mg \cos \beta + 2 \frac{X_C^2 \operatorname{ctg}^2 \theta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[\left(X_{M_1}^1 - X_C^1 \right)^2 + \left(X_C^2 \right)^2 \right] + \left(X_{M_1}^3 - h \right)^2}} N$$

$$J\dot{\omega} = -2X_C^2 \Phi \cos \varphi.$$

Tinând seama de relațiile de legatura, rezulta ecuatia de miscare a centrului de masa al conului dublu

$$(iv) \quad \left[M \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} + J \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{(h - \xi_C \operatorname{tg} \varphi)^2} \right] \ddot{X}_C^1 + J \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{(h - \xi_C \operatorname{tg} \varphi)^3} \left(\dot{X}_C^1 \right)^2 =$$

$$= -Mg \left(\sin \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos \beta \right),$$

precum si valorile reactiunilor

$$N = M \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta \left[\left(X_{M_1}^1 - X_C^1 \right)^2 + \left(X_C^2 \right)^2 \right] + \left(X_{M_1}^3 - h \right)^2}}{2 \operatorname{ctg}^2 \theta} \cdot \frac{g \cos \beta \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} - \ddot{X}_C^1 \operatorname{tg} \varphi}{h - X_C^1 \operatorname{tg} \varphi}$$

$$\Phi = J \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}}{2 \cos \varphi} \cdot \frac{\ddot{X}_C^2 \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} + \left(\dot{X}_C^1 \right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\left(h - X_C^1 \operatorname{tg} \varphi \right)^3}$$

Teorema energiei cinetice

$$\frac{dT}{dt} = P, \quad T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{I}_C \omega, \quad P = Mg \cdot \mathbf{V}_C + (\mathbf{N}_1 + \Phi_1) \cdot \mathbf{V}_{M_1} + (\mathbf{N}_2 + \Phi_2) \cdot \mathbf{V}_{M_2}$$

Utilizând relațiile de legatura (5) si (8), rezulta

$$T = \frac{1}{2} M \left[\left(\dot{X}_C^1 \right)^2 + \left(\dot{X}_C^2 \right)^2 \right] + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \left[M \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} + J \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\left(h - X_C^1 \operatorname{tg} \varphi \right)^2} \right] \left(\dot{X}_C^1 \right)^2$$

$$P = Mg \cdot \mathbf{V}_C = -Mg \left(\dot{X}_C^1 \sin \beta + \dot{X}_C^2 \cos \beta \right) = -Mg \left(\sin \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos \beta \right) \dot{X}_C^1$$

Teorema energiei cinetice conduce la ecuatia (iv).

Ecuatia (iv) admite integrala prima (conservarea sumei dintre energia cinetica si energia potentiala a fortei de greutate)

$$\frac{1}{2} \left[M \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} + J \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{(h - \xi_C \operatorname{tg} \varphi)^2} \right] \dot{\xi}_C^2 =$$

$$= -Mg \left(\sin \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos \beta \right) \xi_C + \text{const.}$$

Considerând viteza initiala nula, aceasta integrala prima devine

(v)

$$\left[M \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta}{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} + J \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{(h - X_C^1 \operatorname{tg} \varphi)^2} \right] (\dot{X}_C^1)^2 =$$

$$= -2Mg \left(\sin \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos \beta \right) (X_C^1 - X_C^{1o})$$

Notând cu r distanța dela centrul de masa la segmentul $M_1 M_2$, adică

$$r = \frac{h - X_C^1 \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi} \operatorname{ctg} \theta$$

integrala prima (v) se rescrie

$$\left(M + \frac{J}{r^2} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2Mg \left(\sin \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos \beta \right) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{ctg} \theta} (r - r^o)$$

sau

$$dt = -C \sqrt{\frac{Mr^2 + J}{r^o - r}} \frac{dr}{r}, \quad C = \frac{\frac{\operatorname{ctg} \theta}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{1}{2Mg \left(\sin \beta - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos \beta \right)}}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

Se obtine

$$(vi) \quad t = -C \int_{r^o}^r \sqrt{\frac{Mr^2 + J}{r^o - r}} \frac{dr}{r}.$$

Din (vi) se vede ca $r \rightarrow 0$ când $t \rightarrow \infty$, adică centrul de masa al conului dublu are mișcare asimptotică spre punctul de intersecție al dreptei (i) (traectoria centrului de masa) cu axa OX^1 .

În raport cu variabila r , viteza centrului de masa al conului dublu și viteza unghiulară au expresiile

$$V_C^2 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{C} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \frac{r^2 (r^o - r)}{Mr^2 + J},$$

$$\omega = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}}{r \operatorname{tg} \varphi} \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{C} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{\sqrt{r^o - r}}{\sqrt{Mr^2 + J}}.$$

Viteza centrului de masa se va anula în poziția inițială și va tinde asimptotic la zero pentru poziția finală.

DINAMICA SISTEMELOR DE SOLIDE RIGIDE

5.1. Pendule cuplate. Sistemul este constituit din doua pendule fizice identice, formate din tije metalice cilindrice omogene, de lungime l' , de raza r' , de masa M' si cilindri circulari omogeni, coaxiali cu tije, de înaltime $2(l'' - l')$, de raza r'' si masa M'' . Axele de suspensie (orizontale paralele in acelasi plan orizontal) ale pendulelor se gasesc la distanta $O_1 O_2 = 2a$. La distantele $O_1 E_1 = O_2 E_2 = h$ fata de axele de suspensie, pendulele sunt cuplate printr-un resort având constanta elastica k . Sa se studieze miscarea sistemului.

Fie un reper inertial cu originea O la mijlocul segmentului $O_1 O_2$, axa OX^1 verticala descendenta, axa OX^2 orizontala. Reperele solidare cu fiecare pendul se aleg la fel ca in cazul pendulelor fizice.

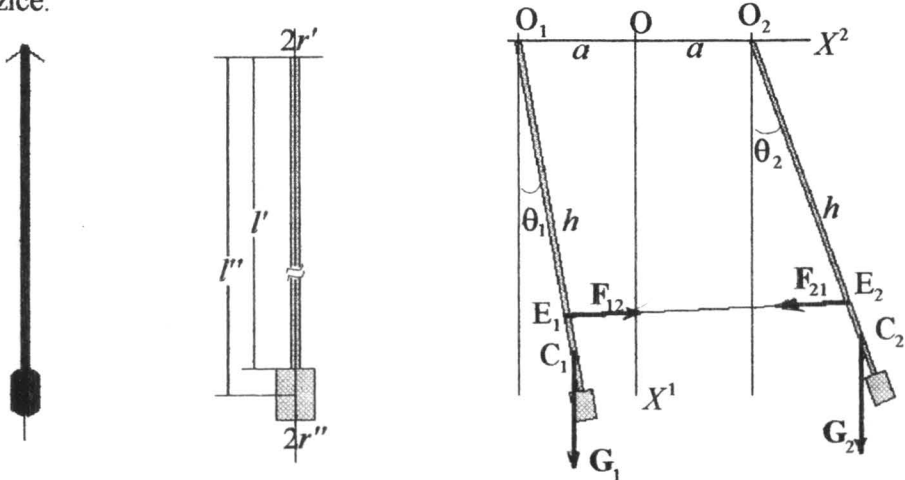


Figura 5.1a

Pozitia sistemului format din pendulele cuplate este determinata prin cunoasterea unghiurilor θ_1, θ_2 , formate de tije cu verticala descendenta.

Asupra pendulelor actioneaza fortele de greutate

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 = (M' + M'')\mathbf{g}$$

aplicate in centrele de greutate C_1 respectiv C_2 , fortele provenind din deformarea resortului

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = k(E_1 E_2 - 2a) \frac{\overrightarrow{E_1 E_2}}{E_1 E_2}$$

aplicate in punctele E_1 respectiv E_2 si reactiunile (forte de legatura) (necunoscute) $\mathbf{R}_1$ si $\mathbf{R}_2$ in punctele O_1 respectiv O_2 .

Distributia de masa in fiecare dintre cele doua pendule este caracterizata prin

– M - masa totala a unui pendul (masa resortului teoretic neglijabila)

$$M = M' + M'',$$

– l - distanta centrului de masa al fiecarui pendul la axa proprie de suspensie

$$Ml = M'l' + M''l'',$$

– momentele principale de inertie in raport cu punctele O_1 respectiv O_2

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}M'r'^2 + \frac{1}{2}M''r''^2,$$

$$I_3 = M' \left(\frac{1}{3} l'^2 + \frac{1}{4} r'^2 \right) + M'' \left[l''^2 + \frac{1}{3} (l'' - l')^2 + \frac{1}{4} r''^2 \right].$$

Pozitia centrelor de masa in raport cu reperul inertial este data de

$$C_1(l \cos \theta_1, -a + l \sin \theta_1, 0), C_2(l \cos \theta_2, a + l \sin \theta_2, 0)$$

Punctele de aplicatie ale fortelor elastice este data de

$$E_1(h \cos \theta_1, -a + h \sin \theta_1, 0), E_2(h \cos \theta_2, a + h \sin \theta_2, 0)$$

si in consecinta

$$E_1 E_2 = \{4a^2 + 4ah(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 2h^2[1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)]\}^{1/2}.$$

Miscarea sistemului si fortele de legatura se obtin din teorema de miscare a centrelor de masa si teorema momentului cinetic in raport cu punctele O_1 respectiv O_2

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(M\mathbf{X}_{C_1}) = M\mathbf{g} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{R}_1, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_{O_1}\omega_1) = \overrightarrow{O_1 C_1} \times M\mathbf{g} + \overrightarrow{O_1 E_1} \times \mathbf{F}_{12}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(M\mathbf{X}_{C_2}) = M\mathbf{g} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{R}_2, \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_{O_2}\omega_2) = \overrightarrow{O_2 C_2} \times M\mathbf{g} + \overrightarrow{O_2 E_2} \times \mathbf{F}_{21}. \end{cases}$$

Tinand seama ca

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{I}_3, \quad \omega_2 = \dot{\theta}_2 \mathbf{I}_3,$$

fortele de legatura rezulta din teoremele de miscare a centrelor de masa dupa ce miscarea sistemului se obtine din teoremele momentului cinetic

$$\begin{cases} I\ddot{\theta}_1 = -Mgl \sin \theta_1 + kh \frac{E_1 E_2 - 2a}{E_1 E_2} [2a \cos \theta_1 + h \sin(\theta_2 - \theta_1)], \\ I\ddot{\theta}_2 = -Mgl \sin \theta_2 - kh \frac{E_1 E_2 - 2a}{E_1 E_2} [2a \cos \theta_2 + h \sin(\theta_2 - \theta_1)]. \end{cases}$$

Integrarea acestor ecuatii diferentiale de ordinul al doilea, nelineare, se poate realiza numai numeric.

In cazul micilor miscari, prin linearizare se obtine sistemul de ecuatii diferentiale lineare

$$\begin{cases} I\ddot{\theta}_1 = -Mgl\theta_1 + kh^2(\theta_2 - \theta_1), \\ I\ddot{\theta}_2 = -Mgl\theta_2 - kh^2(\theta_2 - \theta_1). \end{cases}$$

Aceste ecuatii se mai pot scrie si sub forma

$$\begin{cases} I \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 + \theta_2) + Mgl(\theta_1 + \theta_2) = 0, \\ I \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 - \theta_2) + (Mgl + 2kh^2)(\theta_1 - \theta_2) = 0, \end{cases}$$

si admit solutia

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = (\theta_1^o + \theta_2^o) \cos \omega_1 t + \frac{\dot{\theta}_1^o + \dot{\theta}_2^o}{\omega_1} \sin \omega_1 t \\ \theta_1 - \theta_2 = (\theta_1^o - \theta_2^o) \cos \omega_2 t + \frac{\dot{\theta}_1^o - \dot{\theta}_2^o}{\omega_2} \sin \omega_2 t \end{cases}$$

$\theta_1^o, \theta_2^o, \dot{\theta}_1^o, \dot{\theta}_2^o$ fiind datele initiale, iar

$$\omega_1^2 = \frac{Mgl}{I}, \omega_2^2 = \frac{Mgl + 2kh^2}{I}.$$

Sunt interesante solutiile pentru cateva cazuri particulare de conditii initiale

A) oscilatii normale simetrice

$$\theta_1^o = \theta_2^o = \theta^o, \dot{\theta}_1^o = \dot{\theta}_2^o = 0;$$

in acest caz

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta^o \cos \omega_1 t,$$

oscilatiile fiecarui pendul se desfasoara ca si cum ele nu ar fi cuplate, frecventa oscilatiilor este aceeaasi cu a fiecarui pendul simplu (necuplat)

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1};$$

B) oscilatii normale antisimetrice

$$-\theta_1^o = \theta_2^o = \theta^o, \dot{\theta}_1^o = \dot{\theta}_2^o = 0;$$

in acest caz

$$\theta_1 = -\theta_2 = -\theta^o \cos \omega_2 t,$$

oscilatiile avand perioada

$$\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2};$$

C) oscilatii cu transfer de energie de la un pendul la celalalt, amplitudinea oscilatiilor schimbându-se periodic în timp

$$\theta_1^o = 0, \theta_2^o = \theta^o, \dot{\theta}_1^o = \dot{\theta}_2^o = 0;$$

aceste oscilatii se realizeaza departand unul din pendule, mentinandu-l pe celalalt vertical si lasandu-le sa oscileze fara viteza initiala; se obtine

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}\theta^o[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t], \\ \theta_2 = \frac{1}{2}\theta^o[\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t] \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta^o \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \\ \theta_2 = \theta^o \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \end{cases}$$

Daca perioadele ω_1 si ω_2 au valori apropiate

$$\omega_2 = \omega_1 + \epsilon, \epsilon \ll \omega_1,$$

solutia se mai scrie

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta^o[(1 + \cos \epsilon t)\cos \omega_1 t - \sin \epsilon t \sin \omega_1 t], \\ \theta_2 = \theta^o[(1 - \cos \epsilon t)\cos \omega_1 t + \sin \epsilon t \sin \omega_1 t], \end{cases}$$

se poate considera ca $\sin \epsilon t, \cos \epsilon t$ pentru un interval scurt de timp sunt constante, astfel incat unghiurile θ_1 si θ_2 apar ca variind cu frecventa ω_1 cu amplitudine variabila $2\theta^o \cos\left(\frac{1}{2}\epsilon t\right)$ respectiv $2\theta^o \sin\left(\frac{1}{2}\epsilon t\right)$, amplitudinea variind periodic cu perioada

$$\tau_b = \frac{2\pi}{\omega_b}, \omega_b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} (\omega_2 > \omega_1).$$

Miscarea in ansamblu nu are caracter periodic decat in cazul particular in care exista un multiplu al perioadelor celor doua functii trigonometrice implicate in solutie.

In figura 5.1b s-au prezentat exemplificari ale acestor rezultate pentru caracteristicile pendulelor cuplate de la lucrarea de laborator descrisa in [13]

$$l' = 46 \text{ cm}, l'' = 47.9 \text{ cm}, r' = 0.3 \text{ cm}, r'' = 1.4 \text{ cm}, h = 36 \text{ cm}, a = 5 \text{ cm}, \\ M' = 80 \text{ g}, M'' = 200 \text{ g}, g = 980 \text{ cm s}^{-2}, k = 4.9 \text{ g},$$

pentru o amplitudine initiala mica $\theta^o = 5$ care permite linearizarea ecuatiilor. Pentru aceleasi caracteristici ale aparatului, pentru aceleasi cazuri particulare de conditii initiale, dar pentru o amplitudine initiala $\theta^o = 30$ care nu mai permite utilizarea ecuatiilor linearizate, au fost date reprezentari in figura 5.1c, acestea fiind obtinute prin integrare numerica.

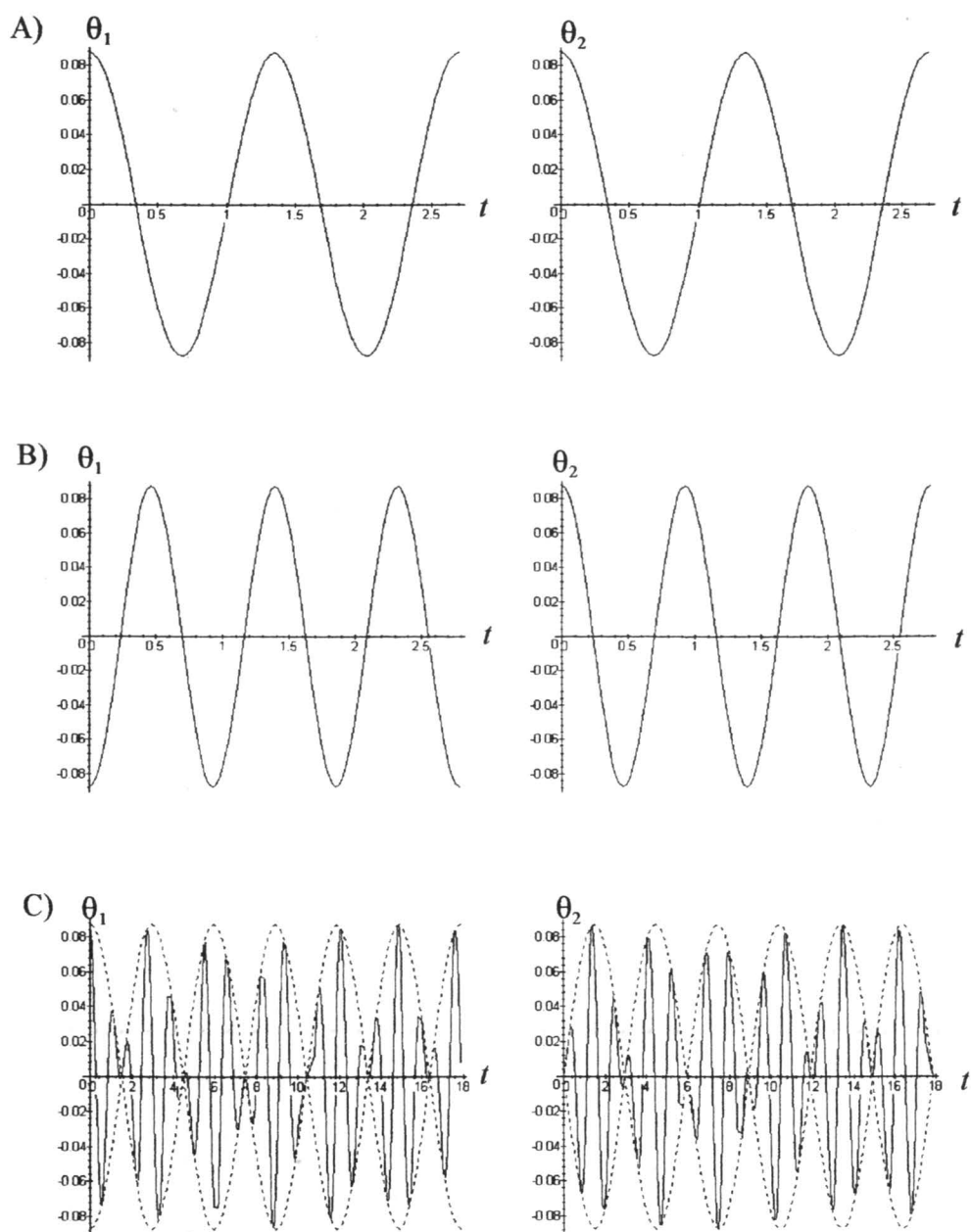


Figura 5.1b

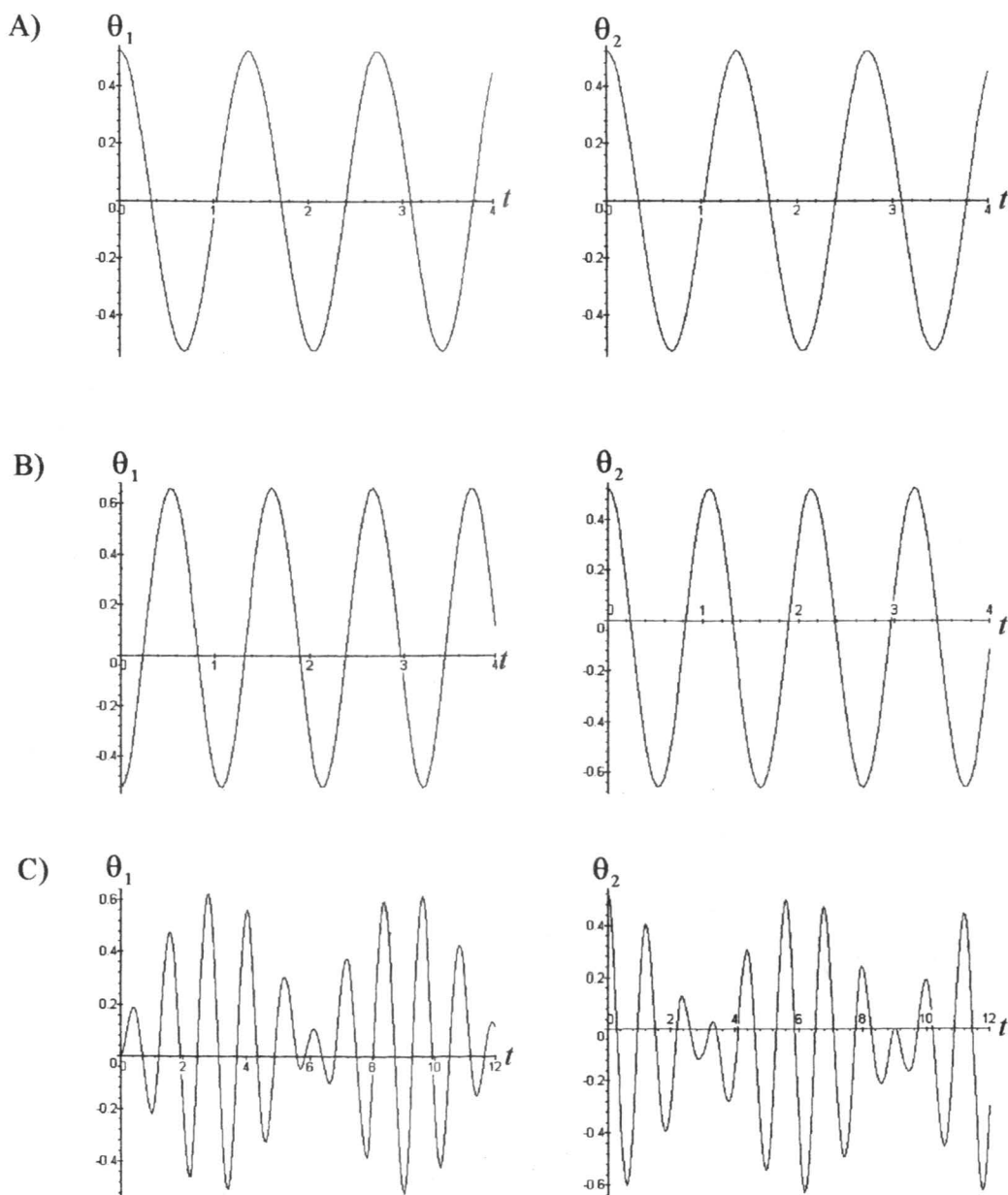


Figura 5.1c

5.2. Pendulul dublu. Sa se studieze miscarea sistemului format din doua corpuri solide (S_1), (S_2), supuse actiunii greutatii proprii si legaturilor urmatoare: corpul solid (S_1) are o axa fixa orizontala Δ_1 care nu trece prin centrul sau de masa si poate oscila in jurul ei; corpul solid (S_2) poate oscila in jurul unei axe Δ_2 paralela cu axa Δ_1 si solidar legata de (S_1).

Pentru simplificare se presupune ca centrele de masa C_1 , C_2 ale celor doua solide se afla in acelasi plan vertical normal la cele doua axe fixe si exista o distributie cu simetrie in raport cu acest plan. Acest plan vertical va fi considerat drept planul $O_1X^1X^2$, originea sa fiind punctul O_1 de intersectie cu axa Δ_1 , iar axa O_1X^1 fiind verticala descendenta. Axa O_1X^3 coincide cu axa Δ_1 . Se mai presupune ca punctul O_2 , de intersectie a axei Δ_2 cu planul vertical de simetrie materiala, se afla pe dreapta O_1C_1 .

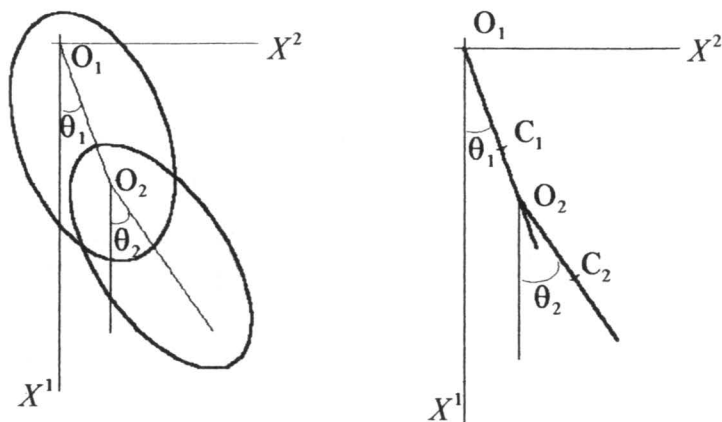


Figura 5.2a

Marimile caracteristice pentru cele doua solide: masele M_1, M_2 , tensorii de inertie $\mathbf{I}_{O_1}^{(1)}, \mathbf{I}_{O_2}^{(2)}$ (din ipoteza de simetrie materiala rezulta $I_{13}^{(1)} = I_{23}^{(1)} = I_{13}^{(2)} = I_{23}^{(2)} = 0$), pozitia centrelor de masa

$$O_1C_1 = l_1, O_2C_2 = l_2, O_1O_2 = a,$$

$$\theta_1 = \angle(O_1X^1, O_1C_1), \theta_2 = \angle(O_1X^1, O_2C_2).$$

Sistemul are doua grade de libertate, pozitia lui fiind caracterizata de unghiurile θ_1, θ_2 .

Fortele care actioneaza asupra sistemului sunt fortele de greutate $M_1\mathbf{g}, M_2\mathbf{g}$, aplicate in centrele de masa C_1 , respectiv C_2 , forta de legatura (necunoscuta) $\mathbf{R}$, urmare a fixarii axei Δ_1 , aplicata in punctul O_1 , fortele de interactiune (necunoscute) intre cele doua solide, urmare a fixarii axei Δ_2 , aplicate in punctul O_2 , forte interioare sistemului format din cele doua solide rigide, $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}'$.

Miscarea sistemului si determinarea celor doua forte de legatura se determina din teoremele de miscare ale centrelor de masa ale celor doua solide rigide si teoremele momentului cinetic in raport cu punctele O_1, O_2 :

$$\frac{d^2}{dt^2}(M_1\mathbf{X}_{C_1}) = M_1\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{R}' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(M_1l_1\cos\theta_1) = M_1g + X + X', \\ \frac{d^2}{dt^2}(M_1l_1\sin\theta_1) = Y + Y', \\ 0 = Z + Z'; \end{cases}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(M_2\mathbf{X}_{C_2}) = M_2\mathbf{g} - \mathbf{R}' \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}(M_2(a\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)) = M_2g - X', \\ \frac{d^2}{dt^2}(M_2(a\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2)) = -Y', \\ 0 = -Z'; \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_{O_1}^{(1)}\boldsymbol{\omega}_1) = \mathbf{X}_{C_1} \times M_1\mathbf{g} + \mathbf{X}_{O_2} \times \mathbf{R}', \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1\mathbf{I}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = aZ'\sin\theta_1, \\ 0 = -aZ'\cos\theta_1, \\ I_{33}^{(1)}\dot{\theta}_1 = -M_1l_1g\sin\theta_1 + a(Y'\cos\theta_1 - X'\sin\theta_1); \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_{O_2}^{(2)}\boldsymbol{\omega}_2) = (\mathbf{X}_{C_2} - \mathbf{X}_{O_2}) \times M_2\mathbf{g} - (\mathbf{X}_{C_2} - \mathbf{X}_{O_2}) \times \frac{d^2}{dt^2}(M_2\mathbf{X}_{O_2}), \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\theta}_2\mathbf{I}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I_{33}^{(2)}\dot{\theta}_2 = -M_2l_2g\sin\theta_2 - M_2al_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - M_2al_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2).$$

Daca se determina miscarea, fortele de legatura se calculeaza din

$$\left\{ \begin{array}{l} X = -(M_1 + M_2)g + \frac{d^2}{dt^2}(M_1 l_1 \cos \theta_1) + \frac{d^2}{dt^2}(M_2(a \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)), \\ Y = \frac{d^2}{dt^2}(M_1 l_1 \sin \theta_1) + \frac{d^2}{dt^2}(M_2(a \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)), \\ Z = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = M_2 g - \frac{d^2}{dt^2}(M_2(a \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)), \\ Y' = -\frac{d^2}{dt^2}(M_2(a \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2)), \\ Z' = 0. \end{array} \right.$$

Ecuatiile propriu-zise de miscare, obtinute prin eliminarea fortelor de legatura, sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) \ddot{\theta}_1 + M_2 a l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + M_2 a l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = \\ \qquad \qquad \qquad = -(M_1 l_1 + M_2 a) g \sin \theta_1, \\ I_{33}^{(2)} \ddot{\theta}_2 + M_2 a l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + M_2 a l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = -M_2 l_2 g \sin \theta_2. \end{array} \right.$$

In cazul unor mici oscilatii $|\theta_1| \ll 1, |\theta_2| \ll 1, \theta_1 - \theta_2 \approx 0, \dot{\theta}_1^2 \approx 0, \dot{\theta}_2^2 \approx 0$, se obtine sistemul de ecuatii diferentiale lineare care descriu miscarea

$$\left\{ \begin{array}{l} (I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) \ddot{\theta}_1 + M_2 a l_2 \ddot{\theta}_2 + (M_1 l_1 + M_2 a) g \theta_1 = 0, \\ M_2 a l_2 \ddot{\theta}_1 + I_{33}^{(2)} \ddot{\theta}_2 + M_2 l_2 g \theta_2 = 0. \end{array} \right.$$

Pentru ca solutia acestui sistem de ecuatii diferentiale lineare sa corespunda unor mici oscilatii, este necesar ca radacinile ecuatiei caracteristice

$$\det \begin{bmatrix} (I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) \lambda^2 + (M_1 l_1 + M_2 a) g & M_2 a l_2 \lambda^2 \\ M_2 a l_2 \lambda^2 & I_{33}^{(2)} \lambda^2 + M_2 l_2 g \end{bmatrix} = 0$$

sa aiba radacini complexe cu parte reala negativa. Ecuatia caracteristica are forma particulara a unei ecuatiei bipatrate

$$\left[\left((I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) I_{33}^{(2)} - (M_2 a l_2)^2 \right) \lambda^4 + \left[(I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) M_2 l_2 + I_{33}^{(2)} (M_1 l_1 + M_2 a) \right] g \lambda^2 + (M_1 l_1 + M_2 a) M_2 l_2 g^2 \right] = 0$$

deci trebuie sa fie indeplinite conditiile

$$\begin{aligned} & (I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) I_{33}^{(2)} - (M_2 a l_2)^2 > 0, \\ & \left[(I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) M_2 l_2 + I_{33}^{(2)} (M_1 l_1 + M_2 a) \right]^2 - \\ & - 4(M_1 l_1 + M_2 a) M_2 l_2 \left[(I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) I_{33}^{(2)} - (M_2 a l_2)^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

Ultima conditie se rescrie

$$\left[(I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) M_2 l_2 - I_{33}^{(2)} (M_1 l_1 + M_2 a) \right]^2 + 4(M_1 l_1 + M_2 a) M_2 l_2 (M_2 a l_2)^2 > 0$$

este automat indeplinita. Singura conditie care trebuie verificata este

$$(I_{33}^{(1)} + M_2 a^2) I_{33}^{(2)} - (M_2 a l_2)^2 > 0.$$

În figura 5.2b s-a prezentat variația unghiurilor θ_1, θ_2 obținută prin integrare numerică în cazul în care cele două solide rigide sunt bare omogene din același material și prin urmare

$$M_1 = 2\rho l_1, M_2 = 2\rho l_2, I_{33}^{(1)} = \frac{4}{3}M_1 l_1^2, I_{33}^{(2)} = \frac{4}{3}M_2 l_2^2, a = 2l_1,$$

pentru datele inițiale

$$\theta_1^o = 3, \theta_2^o = -5, \dot{\theta}_1^o = 0, \dot{\theta}_2^o = 0,$$

pentru trei cazuri particulare

$$\text{A) } l_1 = l_2; \quad \text{B) } l_1 = 2l_2; \quad \text{C) } l_2 = 2l_1.$$

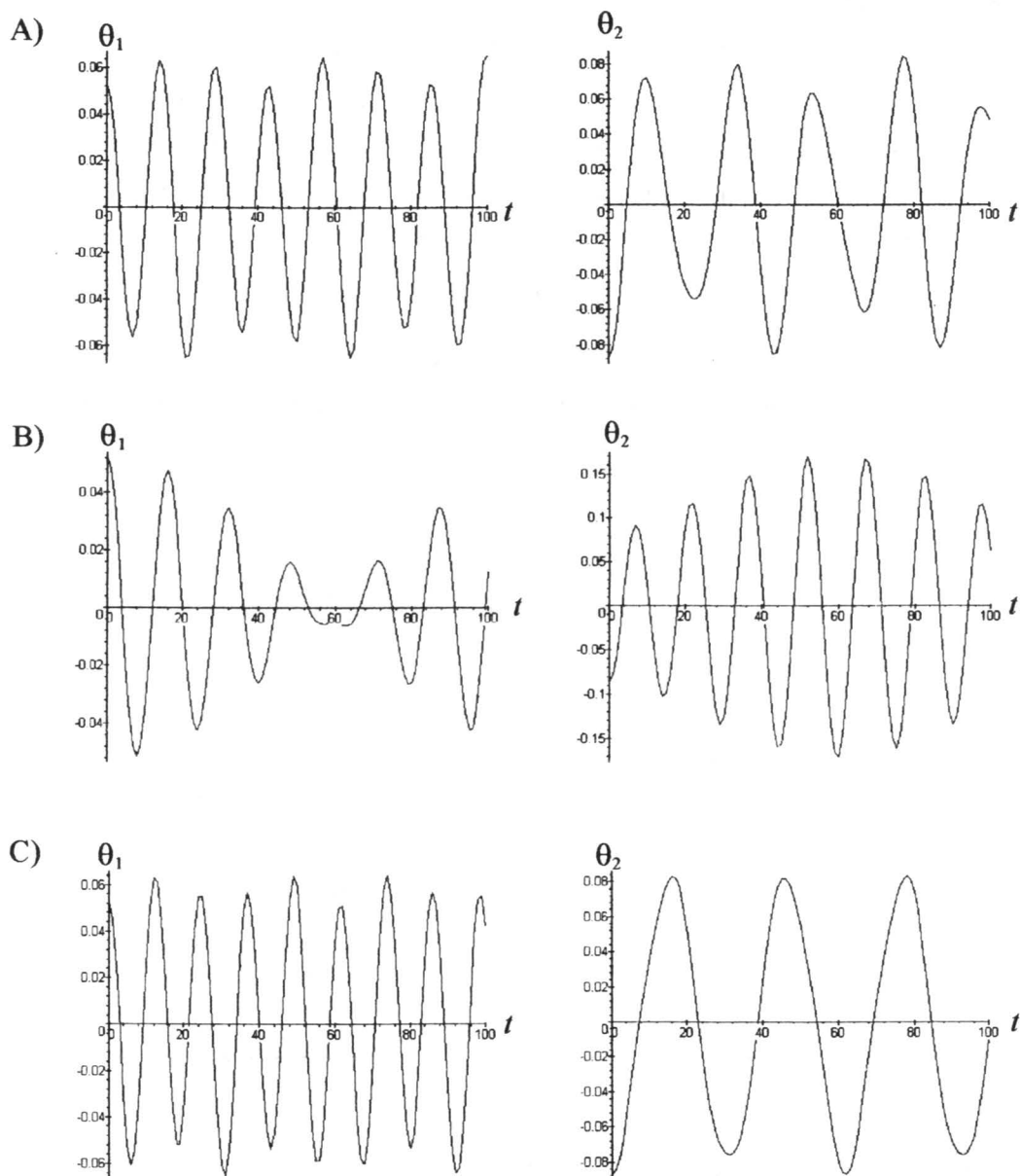


Figura 5.2b

O situație specială poate să apară pentru anumite caracteristici ale sistemului și anume sistemul să se miște ca un singur solid rigid, adică $\theta_1(t) \equiv \theta_2(t)$. Pentru aceasta este necesar să se considere aceleași condiții inițiale pentru cele două unghiuri $\theta_1^o = \theta_2^o, \dot{\theta}_1^o = \dot{\theta}_2^o$ și în același

timp caracteristicele celor doua solide rigide sa fie astfel incat sa asigure proportionalitatea coeficientilor celor doua ecuatii diferentiale (cele doua ecuatii sa coincidă)

$$\frac{I_{33}^{(1)} + M_2 a^2 + M_2 a l_2}{M_1 l_1 + M_2 a} = \frac{I_{33}^{(2)} + M_2 a l_2}{M_2 l_2},$$

in acest caz miscarea sistemului este data de ecuatia unui pendul simplu sincron cu lungimea

$$l' = a + \frac{I_{33}^{(2)}}{M_2 l_2}.$$

O asemenea situatie s-a intalnit la instalarea clopotului catedralei din Köln in 1876 (clopotul si limba au permanent acelasi unghi de deviatie fata de verticala, limba nu se loveste de clopot si acesta nu suna)

BIBLIOGRAFIE

1. T.Angheluță. Exerciții și probleme de Analiză, Teoria funcțiilor și Mecanică rațională (cu prefață de P.Montel), Ed.Universității Cluj, 1927
2. P.Appell. Traité de Mécanique rationnelle, vol.I-V, ed.5., Gauthier-Villars, Paris, 1926
3. V.Arnold. Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Ed.Mir, Moscova, 1976
4. Șt.Bălan. Culegere de probleme de mecanică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1972, 1977
5. I.Beju, E.Soós, P.P.Teodorescu. Tehnici de calcul vectorial cu aplicații, Ed.Tehnică, București, 1976
6. I.Beju, E.Soós, P.P.Teodorescu. Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicații, Ed.Tehnică, București, 1977
7. I.Beju, E.Soós, P.P.Teodorescu. Tehnici de calcul spinorial și tensorial neeuclidian cu aplicații, Ed.Tehnică, București, 1979
8. P.Brădeanu, I.Pop, D.Brădeanu. Probleme și exerciții de mecanică teoretică, Ed.Tehnică, București, 1979
9. N.Ciorănescu. Ecuațiile mecanicii analitice, Ed.Academiei Române, Monografii științifice, vol.I, 1938
10. L.Dragoș. Principiile mecanicii analitice, Ed.Tehnică, București, 1976
11. C.Iacob. Mecanică teoretică, Ed.didactică și pedagogică, București, 1971, 1980
12. A.G.Ioachimescu. Mecanica rațională (reeditare de G.Țițeica, Al.Stoenescu), Imprimeria Națională, București, 1947
13. D.Massier. Indrumar pentru efectuarea lucrărilor de laborator la mecanică, Tipografia Universității București, 1986
14. I.V.Mechtcherski. Recueil de problèmes de mécanique rationnelle, Ed.Mir, Moscova, 1968
15. I.I.Plăcișteanu. Mecanică vectorială și analitică, Ed.Tehnică, București, ed.2, 1958
16. A.Radu. Probleme de mecanică, Centrul de multiplicare al Universității "Al.I.Cuza", Iași, 1975
17. E.Rogai. Culegere de probleme de mecanică (pentru studenții de la secția matematică-fizică), Tipografia Universității București, 1987
18. A.Stan, M.Grumăzescu. Probleme de mecanică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1973
19. P.P.Teodorescu. Sisteme mecanice - modele clasice, vol.1,2,3, Ed.Tehnică, București, 1984, 1988, 1997
20. V.Vălcovici și colab. Mecanică teoretică, Ed.Tehnică, București, 1959, 1968
21. R.Voinaroski. Mecanică teoretică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1968
22. R.Voinea și colab. Probleme de mecanică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1963
23. F.Wittenbauer. Aufgaben aus der technischen Mechanik, Springer Verlag, Berlin, 1929
24. M.Yvon. Problèmes de Mécanique rationnelle
25. D.Massier. Mecanica. Aplicații, Ed.Universității București, 1998



*Tiparul s-a executat sub cda 815/2001
la Tipografia Editurii Universității din București.*

ISBN 973-575-551-3

Lei 50000